1. Tutorium VU Quantentheorie I – Lösungen, 16.10.2015

1. a) $|A| = \sqrt{2b}$
   b) $W(-2 \leq x \leq 2) = 1 - e^{-8b}$

2. - $\phi(t) = e^{-i\omega t}$ mit $\omega = \frac{E}{\hbar}$, $E \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Die stationären Lösungen der Schrödingergleichung haben die Form $\Psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$.
   - $V(x) = 0, E > 0 \Rightarrow \psi(x) = Ae^{\pm ikx}$ mit $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \leftrightarrow E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ (Dispersionsrelation)
   - $\Rightarrow \Psi(x,t) = Ae^{i(\pm kx - \omega t)} = Ae^{\frac{i}{\hbar}(\pm px - Et)}$ (ebene Welle)
   - Die ebenen Wellen sind im Intervall $(-\infty, \infty)$ nicht quadratintegrabel (normierbar) und maximal delokalisiert.
   - Beliebige (diskrete und kontinuierliche) Superpositionen der ebenen Wellen mit unterschiedlichen E bzw. k sind ebenfalls Lösungen der zeitabhängigen Schrödingergleichung, erfüllen aber nicht den Separationsansatz.
   - (*nicht verlangt*) Ein allgemeiner Anfangszustand $\psi(x,0)$ kann nach ebenen Wellen entwickelt werden:
     $\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(kx - \omega(k)t)}\tilde{\psi}(k)dk$ mit $\tilde{\psi}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx}\psi(x,0)dx$

3. a) $\langle x \rangle = \frac{L}{2}$, $\langle x^2 \rangle = L^2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n^2\pi^2}\right)$, $\sigma_x = \frac{L}{2\sqrt{3}}\sqrt{1 - \frac{6}{n^2\pi^2}}$
   b) $W_{\text{kl.}}(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{L}dx \Rightarrow$
   $\langle x \rangle_{\text{kl.}} = \frac{L}{2} = \langle x \rangle$
   $\langle x^2 \rangle_{\text{kl.}} = \frac{L^2}{3} = \langle x^2 \rangle_{n\to\infty}$
   $\sigma_{x,\text{kl.}} = \frac{L}{2\sqrt{3}} = \sigma_{x,n\to\infty}$ (Korrespondenzprinzip)

4. Lösen der stationären Schrödingergleichung im beschränkten Bereich $0 \leq x \leq L$ mit Neumann-Randbedingungen ergibt:
   - $E_0 = 0$, $\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{L}}$
   - $E_n = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 n^2$, $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$
   - Im Vergleich zu den Dirichlet-Randbedingungen gibt es einen Grundzustand mit $E = 0$. Für die Eigenenergien zu $n > 0$ ergeben sich die selben Werte wie beim Dirichlet-Problem mit phasenverschobenen Eigenfunktionen.
   - (*nicht verlangt*) Für den Ortserwartungswert erhält man wieder $\langle x \rangle = \frac{L}{2}$. Das 2. Moment und die Standardabweichung stimmen nur im Limes $n \to \infty$ überein: $\langle x^2 \rangle = L^2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n^2\pi^2}\right)$, $\sigma_x = \frac{L}{2\sqrt{3}}\sqrt{1 + \frac{6}{n^2\pi^2}}$