2. Tutorium VU Quantentheorie I, 23.10.2015

1. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m im *dreidimensionalen*, unendlich tiefen Potentialtopf, d.h. im Potential $V(x,y,z) = V(x) + V(y) + V(z)$ mit

$$V(\xi) = \begin{cases} \infty & \xi \leq 0 \\ 0 & 0 < \xi < L_\xi \\ \infty & \xi \geq L_\xi \end{cases} .$$

   Lösen Sie die dreidimensionale stationäre Schrödingergleichung

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(x,y,z)\right]\psi(x,y,z) = E\psi(x,y,z)$$

   für Dirichlet-Randbedingungen und bestimmen Sie die normierten Bindungszustände und Eigenenergien des Systems. Lässt sich ein Eigenzustand in diesem Fall eindeutig über seine Energie identifizieren?

   Hinweis: Die Lösung des eindimensionalen Potentialtopfes kann als bekannt vorausgesetzt werden (siehe Beispiel 3 vom 1. Tutorium).

2. Untersuchen Sie wie sich eine Wellenfunktion $\psi(x)$ bei einer Diskontinuität an der Stelle x_0 des Potentials $V(x)$ verhält. Betrachten Sie dazu die zeitunabhängige Schrödingergleichung für ein Teilchen der Masse m in einer Dimension

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right]\psi(x) = E\psi(x)$$

   für (a) die Potentialstufe $V(x) = V_0\,\Theta(x - x_0)$ und (b) die Delta-"Funktion" $V(x) = V_0\,\delta(x - x_0)$ mit $V_0 \in \mathbb{R}$.

   Bestimmen Sie, ob die Wellenfunktion $\psi(x)$ an der Stelle x_0 stetig bzw. stetig differenzierbar bleibt und skizzieren Sie den Verlauf von $\psi(x)$ in der Umgebung von x_0. Zeigen Sie, dass für diese beiden Fälle gilt:

   a) $\psi(x_0-) = \psi(x_0+) = \psi(x_0),\ \psi'(x_0-) = \psi'(x_0+) = \psi'(x_0)$
   b) $\psi(x_0-) = \psi(x_0+) = \psi(x_0),\ \psi'(x_0-) = \psi'(x_0+) - V_0\frac{2m}{\hbar^2}\psi(x_0)$

   Was passiert für (a) im Grenzfall $V_0 \to \infty$?

   Hinweis: Lösen Sie das Problem, indem Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung über ein kleines Intervall $x_0 - \epsilon < x < x_0 + \epsilon$ integrieren und dann den Grenzübergang $\epsilon \to 0+$ durchführen.

3. Ein Teilchen mit Masse m befindet sich in einem kurzreichweitigen Potential $V(x)$, das durch eine δ-“Funktion” angenähert werden kann:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x), \; D > 0$$

Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für $E < 0$, d.h. finden Sie die Energien aller gebundenen Zustände und die dazugehörigen (normierten) Wellenfunktionen. Verwenden Sie dazu die im 2. Beispiel behandelten Anschlussbedingungen.

4. Das System aus Beispiel 3 wird nun im Abstand l neben einer undurchdringlichen Wand positioniert. Das neue Potential ist somit:

$$V(x) = \begin{cases} -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x) & x > -l \\ \infty & x \leq -l \end{cases}$$

   a) Unter welchen Bedingungen hat das System noch einen gebundenen Zustand? Veranschaulichen Sie das Problem grafisch.

   b) Wie wird die Bindungsenergie des Teilchens in dem Fall durch die Wand verändert? Geben Sie eine Näherung für große Abstände l an.

   c) Finden Sie eine numerische Lösung von (b) für $D = 1$. Stellen Sie die Bindungsenergie (bzw. $\frac{Em}{\hbar^2}$) und die Wellenfunktion grafisch in Abhängigkeit von l dar.

Zu kreuzen (online im *tuwel*-Kurs zur LVA): 1/2/3/4ab/4c