3. Tutorium VU Quantentheorie I, 30.10.2015

1. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m im eindimensionalen Potential $V(x)$:

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \leq 0 \\ -V_0 & 0 < x < a \\ 0 & x \geq a \end{cases}$$

Gibt es für den Fall $V_0 = \frac{\hbar^2}{ma^2}$ gebundene Eigenzustände (d.h. stationäre Lösungen der Schrödingergleichung)? Vergleichen Sie Ihr Resultat mit dem symmetrischen Kastenpotential, das im Plenum behandelt wurde.

2. Auf ein kurzreichweitiges Potential $V(x)$, das durch eine δ-"Funktion" angenähert werden kann, falle von links in positiver x-Richtung laufend ein Strom von Teilchen der Masse m und Energie $E > 0$ ein.

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\delta(x), \; D \in \mathbb{R}$$

Die Wahrscheinlichkeitsstromdichte des einfallenden Stromes sei gegeben durch

$$j_{\text{in}} = \frac{\hbar k}{m}, \; k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \; .$$

a) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung für $E > 0$ und bestimmen Sie die Wellenfunktion Ψ_E zur Energie E für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie die dazugehörige Wahrscheinlichkeitsstromdichte j_E und zeigen Sie insbesondere, dass diese an $x = 0$ stetig ist.

c) Überprüfen Sie, ob der an der Schwelle reflektierte und transmittierte Betrag des Wahrscheinlichkeitsstromes in Summe gleich groß sind wie der Betrag des einfallenden Stromes. Begründen Sie Ihr Ergebnis physikalisch und bringen Sie es in Verbindung mit dem Resultat aus (b).

d) Bestimmen Sie den Transmissionskoeffizienten T und fertigen Sie eine Skizze für $T(k)$ an. Untersuchen Sie die Grenzfälle $|D| << k$ und $|D| >> k$. Hängt T vom Vorzeichen von D ab? Wie verhält sich T für $D \to \infty$ (bei festem E)?

e) Zeigen Sie, dass man die Wellenfunktion in der Form $\Psi_E = e^{ikx} + Fe^{ik|x|}$ darstellen kann. Bestimmen Sie den Koeffizienten F.

f) Bestimmen Sie die Polstelle von F. Wie hängt diese mit der Energie des gebundenen Zustands des Potentials $V(x)$ für $D > 0$ zusammen (siehe Beispiel 3 vom 2. Tutorium).

3. Gegeben sind zwei anziehende δ-Potentiale, die sich im Abstand $2a$ voneinander befinden,

$$V(x) = -\frac{\hbar^2}{m} D\,\delta(x+a) - \frac{\hbar^2}{m} D\,\delta(x-a)\,, \quad D > 0,\, a > 0\,.$$

Auf das Potential falle in positiver x-Richtung laufend ein Strom von Teilchen der Masse m und Energie $E = \hbar^2 D^2/(2m)$ ein.

a) Lösen Sie die Schrödingergleichung und berechnen Sie die Transmissionswahrscheinlichkeit T als Funktion von Da und skizzieren Sie Ihr Ergebnis. Bestimmen Sie außerdem die Reflexionswahrscheinlichkeit R aus der Erhaltung der Wahrscheinlichkeitsstromdichte und zeichnen Sie den Verlauf von R in Ihre Skizze ein.

b) Bestimmen Sie jene Werte von Da, für welche die Transmission am größten bzw. am kleinsten ist, sowie die zugehörigen Werte T_{max}, T_{min}.

c) Bringen Sie Ihre Ergebnisse mit dem Konzept eines Fabry-Pérot-Interferometers aus der Optik in Verbindung.

Zu kreuzen (online im *tuwel*-Kurs zur LVA): 1/2abc/2def/3