3. Tutorium VU Quantentheorie I – Lösungen, 30.10.2015

1. Das Beispiel ist im Bereich $x > 0$ und mit der Randbedingung $\Psi(x=0) = 0$ äquivalent zum symmetrischen Kastenpotential (Plenum vom 14.10.2015) für die *ungeraden* gebundenen Eigenfunktionen. Man erhält deshalb die selbe Bedingung für die Eigenenergien:

   $\kappa a = -Ka\cot(Ka) \quad \text{mit} \quad K = \sqrt{\frac{2m(V_0-|E|)}{\hbar^2}}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}, \quad E < 0$

   Für $V_0 = \frac{\hbar^2}{ma^2}$ hat die transzendente Gleichung allerdings keine Lösung und somit existiert kein gebundener Eigenzustand.

2. a) $\Psi_E(x) = \theta(-x)\left[e^{ikx} + \frac{iD}{k-iD}e^{-ikx}\right] + \theta(x)\left[\frac{k}{k-iD}e^{ikx}\right], \; k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

   b) $j_I(0) = j_{II}(0)$ („Teilchenzahlerhaltung“), da: $j_I = j_{II} = \frac{\hbar k}{m}\frac{k^2}{k^2+D^2} = j$

   c) $j_{\text{ein}} = \frac{\hbar k}{m}$, $j_{\text{ref}} = -\frac{D^2}{k^2+D^2}\frac{\hbar k}{m}$, $j_{\text{trans}} = j_I = j_{II} = \frac{k^2}{k^2+D^2}\frac{\hbar k}{m}$

   $\Rightarrow |j_{\text{ref}}| + |j_{\text{trans}}| = |j_{\text{ein}}|$

   d) $T = \frac{k^2}{k^2+D^2}$

   $|D| \ll k \Rightarrow T \to 1 - \frac{D^2}{k^2} \approx 1$

   $|D| \gg k \Rightarrow T \to \frac{k^2}{D^2} \ll 1$

   $\lim_{D\to\infty} T(D;k) = 0$

   e) $\Psi_E(x) = \theta(-x)\left[e^{ikx} + \frac{iD}{k-iD}e^{-ikx}\right] + \theta(x)\left[\frac{k}{k-iD}e^{ikx}\right] = e^{ikx} + \frac{iD}{k-iD}e^{ik|x|}$

   f) $k_{\text{Pol}} = iD, \; E = \frac{\hbar^2k^2}{2m} \Rightarrow \frac{\hbar^2 k_{\text{Pol}}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2 D^2}{2m} = E_{\text{geb}}$

3. Die Lösung der Schrödingergleichung für die Bereiche I: $x < -a$, II: $-a < x < a$, III: $x > a$ lautet $\psi_{I,II,III}(x) = A_{I,II,III}e^{ikx} + B_{I,II,III}e^{-ikx}, \; k = D$.

   Unter Verwendung der Streurandbedingung $B_{III} = 0$ lassen sich mit Hilfe der Anschlussbedingungen für das Delta-Potential an den Bereichsgrenzen $x = -a$ und $x = a$ alle anderen Koeffizienten in Abhängigkeit von A_I bringen (4 linear unabhängige Gleichungen für 5 Unbekannte). Für die Bestimmung des Transmissionskoeffizienten ist es allerdings lediglich erforderlich A_I und A_{III} explizit in Beziehung zu bringen. Man erhält:

   a) $T = \frac{|A_{III}|^2}{|A_I|^2} = \frac{1}{5-4\sin(4Da)}$

   b) $R = 1 - T$

   c) $T_{\max} = 1 \quad \text{wenn} \quad 4Da = \frac{\pi}{2} + 2n\pi, \; n \in \mathbb{N}$

   $T_{\min} = \frac{1}{9} \quad \text{wenn} \quad 4Da = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi, \; n \in \mathbb{N}$