4. Tutorium VU Quantentheorie I, 13.11.2015

1. Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im unendlich tiefen Potentialtopf, d.h.

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & |x| > a \\ 0 & |x| \leq a \end{cases} .$$

   a) Wie lautet der Ortserwartungswert $\langle x \rangle_t$ zu beliebigen Zeiten $t > 0$, wenn sich das Teilchen zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand $\Psi(x, 0) = A \cos^3(\frac{\pi}{2a} x)$ befindet ($|A| > 0$)?

   b) Zeigen Sie, dass die Wellenfunktion des Teilchens für einen beliebigen Anfangszustand $\Psi(x, 0)$ nach der Zeit $T = \frac{16ma^2}{\pi\hbar}$ („revival time") wieder die ursprüngliche Form annimmt, d.h. $\Psi(x, T) = \Psi(x, 0)$. Vergleichen Sie T mit der klassischen „revival time" für ein Teilchen mit Energie E, das zwischen den Wänden reflektiert wird.

2. Ein Teilchen der Masse m befindet sich im Grundzustand $\Psi_0(x)$ des unendlich tiefen Potentialtopfes (siehe Beispiel 1), d.h.

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{\pi}{2a} x\right), \; E_0 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} .$$

   Zum Zeitpunkt $t = 0^-$ werden die Wände plötzlich zu den Positionen $-2a$ bzw. $2a$ verschoben. Sie können annehmen, dass die Wellenfunktion sich während des Verschiebens der Wände nicht verändert („sudden approximation"), d.h. $\Psi(x, 0^+) = \Psi_0(x)$.

   a) Stellen Sie das Problem in einer Skizze dar.

   b) Bestimmen Sie die Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ für alle Zeiten $t > 0$.

   c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen für $t > 0$ im Grundzustand bzw. in einem ungeraden Eigenzustand des vergrößerten Potentialtopfes zu finden?

   d) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit vor bzw. nach dem Verschieben der Wand die Energie E_0 (des ursprünglichen Grundzustands) zu messen?

   e) Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie vor bzw. nach dem Verschieben der Wand, also $\langle H \rangle_{t<0}$ und $\langle H \rangle_{t>0}$.

   Hinweise:

   - Setzen Sie die Eigenzustände und Eigenenergien des unendlich tiefen Potentialtopfs als bekannt voraus.
   - $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(2m+1)^2}{[(2m+1)^2 - 4]^2} = \frac{\pi^2}{16}, \; m \in \mathbb{N}$

3. Gegeben sei ein Teilchen der Masse m im eindimensionalen Potential $V(x)$:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m}\frac{1}{\cosh^2(ax)}, \; a > 0$$

a) Fertigen Sie eine Skizze an, zeigen Sie dass das Potential den gebundenen Zustand $\psi_0(x) = \frac{N}{\cosh(ax)}$ aufweist und bestimmen Sie die dazugehörige Eigenenergie E_0 und die Normierungskonstante N.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi_k(x) = A\left(\frac{ik - a\tanh(ax)}{ik+a}\right)e^{ikx}$ eine Lösung der Schrödingergleichung für beliebige $E > 0$ ist ($k = \sqrt{2mE}/\hbar$).

c) Untersuchen Sie den asymptotischen Verlauf der Wellenfunktion $\psi_k(x)$ für $x \to \pm\infty$ und bestimmen Sie daraus den Transmissionskoeffizienten für das vorliegende Potential.

Zu kreuzen (online im *tuwel*-Kurs zur LVA): 1/2ab/2cde/3