4. Tutorium VU Quantentheorie I – Lösungen, 13.11.2015

1. a) $\langle x \rangle_t = 0$ (aus Symmetriegründen)

   b) $T = \frac{16ma^2}{\pi\hbar} \Rightarrow \Psi(x,T) = \Psi(x,0)$ für beliebige $\Psi(x,0)$, da: $e^{-i2\pi n^2} = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$
   $T_{\text{cl.}} = 4a\sqrt{\frac{m}{2E}}$ ($\rightarrow$ abhängig von der Energie des betrachteten Zustands)

2. b) $\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Phi_n(x) e^{-itE_n/\hbar}$, $c_n = -\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{[1-(-1)^n]}{n^2-4} \cos\frac{n\pi}{4}$, mit:
   $\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(\frac{n\pi}{4a}x\right)$, $n = 1,3,5,\ldots$
   $\Phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sin\left(\frac{n\pi}{4a}x\right)$, $n = 2,4,6,\ldots$
   $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{32ma^2} n^2$, $n = 1,2,3,\ldots$

   c) $W_1 = |\langle \phi_1 \,|\, \Psi(t) \rangle|^2 = |c_1|^2 \approx 0.72$ ($n = 1 \rightarrow$ Grundzustand)
   $W_u = |\langle \phi_{2,4,\ldots} \,|\, \Psi(t) \rangle|^2 = |c_{2,4,\ldots}|^2 = 0$ ($n = 2,4,\ldots \rightarrow$ ungerade Eigenfunktionen)

   d) $W_{E_0}(t < 0) = 1$
   $W_{E_0}(t > 0) = |c_2|^2 = 0$

   e) $\langle H \rangle_{t<0} = \langle H \rangle_{t>0} = E_0$ (Energieerhaltung)

3. a) $N = \sqrt{\frac{a}{2}}$
   $\hat{H}\,|\psi_0\rangle = E_0\,|\psi_0\rangle$
   $\Rightarrow \psi_0(x)$ ist Eigenfunktion zur Energie $E_0 = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}$

   b) $\hat{H}\,|\psi_k\rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\,|\psi_k\rangle = E\,|\psi_k\rangle$
   $\Rightarrow \psi_k(x)$ ist Eigenfunktion zur Energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0$ für beliebige $k > 0$.

   c) $T(E) = 1 \; \forall E > 0$ ($\rightarrow R = 0$)