5. Tutorium VU Quantentheorie I, 20.11.2015

1. Zeigen Sie die Gültigkeit folgender (Anti-)Kommutator Beziehungen für die Operatoren $\hat{A}, \hat{B}$ und $\hat{C}$:
$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C} - \hat{B}[\hat{C}, \hat{A}]$$
$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}]_+ \hat{C} - \hat{B}[\hat{C}, \hat{A}]_+$$

   Verwenden Sie diese Beziehungen, um den Kommutator des Ortsoperators $\hat{x}$ mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + \hat{V}(\hat{x})$ zu berechnen. Was folgt daraus für den Erwartungswert $\langle\phi|\hat{p}|\phi\rangle$, wenn $|\phi\rangle$ ein gebundener Eigenzustand des Hamiltonoperators ist?

2. Gegeben sei ein zweidimensionaler komplexer Hilbertraum, für den eine Basis durch zwei orthonormierte Vektoren $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle\}$ gegeben ist (Basis der $\{a\}$-Darstellung). Eine weitere Basis des Hilbertraums sei durch die Vektoren,
$$|b_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a_1\rangle + i|a_2\rangle\right) , \quad |b_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a_1\rangle - i|a_2\rangle\right) ,$$
   definiert (Basis der $\{b\}$-Darstellung).

   a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$ ebenfalls eine orthonormierte Basis bilden. Benutzen Sie dazu die bra-ket Notation.
   b) Geben Sie die Matrixform der Ketvektoren $|a_1\rangle$, $|a_2\rangle$, $|b_1\rangle$, $|b_2\rangle$, sowie der Bravektoren $\langle b_1|$, $\langle b_2|$ in der $\{a\}$-Darstellung an. Schreiben Sie die Skalarprodukte $\langle b_1|b_1\rangle$, $\langle b_1|b_2\rangle$, $\langle b_2|b_2\rangle$ als Produkte der entsprechenden Matrizen an.
   c) Drücken Sie den Operator $\hat{U}$, der den Basiswechsel $|b_i\rangle = \hat{U}|a_i\rangle$ beschreibt, durch die Vektoren $|a_i\rangle$, $|b_i\rangle$ aus. Welche Matrix ist diesem Operator $\hat{U}$ in der $\{a\}$-Darstellung zugeordnet? Untersuchen Sie, ob diese Matrix unitär ist und kommentieren Sie das Ergebnis.
   d) Ein Ketvektor $|\chi\rangle$ und ein linearer Operator $\hat{T}$ seien in der $\{a\}$-Darstellung durch folgende Matrizen gegeben:
$$\chi^{\{a\}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad T^{\{a\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
   Wie lauten die entsprechenden Matrizen von $|\chi\rangle$ und $\hat{T}$ in der $\{b\}$-Darstellung? Zeigen Sie, dass die Berechnung des Erwartungswerts $\left\langle \chi \middle| \hat{T} \middle| \chi \right\rangle$ in den beiden Darstellungen zum selben Ergebnis führt.

3. In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum sind der Hamiltonoperator $\hat{H}$ und der Operator $\hat{B}$ durch ihre Wirkung auf die orthonormierten Basiszustände $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ gegeben:

$$\begin{aligned} \hat{H}|\phi_1\rangle &= -a|\phi_1\rangle & \hat{B}|\phi_1\rangle &= b|\phi_1\rangle \\ \hat{H}|\phi_2\rangle &= a|\phi_2\rangle & \hat{B}|\phi_2\rangle &= -2ib|\phi_3\rangle \\ \hat{H}|\phi_3\rangle &= 2a|\phi_3\rangle & \hat{B}|\phi_3\rangle &= 2ib|\phi_2\rangle \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Matrizen $H^{\{\phi\}}$ und $B^{\{\phi\}}$, die den Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ zugeordnet sind. Sind $\hat{H}$ und $\hat{B}$ hermitesch? Kommutieren $\hat{H}$ und $\hat{B}$?

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die normierten Eigenzustände von $\hat{H}$ und $\hat{B}$. Ordnen Sie die Zustände aufsteigend nach den dazugehörigen Eigenwerten und geben Sie die Vektordarstellung der Eigenzustände in der Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ an. Überprüfen Sie, ob die Eigenzustände orthogonal zueinander sind.

c) Der Zustand eines Teilchens sei zu einem bestimmten Zeitpunkt durch

$$|\chi\rangle = \frac{1}{13}\left(5|\phi_1\rangle + 12|\phi_3\rangle\right)$$

gegeben. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, bei einer Energiemessung die Energieeigenwerte E_1, E_2, E_3, bzw. bei einer Messung der Observablen B die Eigenwerte B_1, B_2, B_3 zu messen. Berechnen Sie außerdem die Erwartungswerte der Energie und der Observablen B.

Zu kreuzen (online im *tuwel*-Kurs zur LVA): 1/2ab/2cd/3