6. Tutorium VU Quantentheorie I, 27.11.2015

1. In einem zweidimensionalen Hilbertraum sind der Operator $\hat{A}$ und der Operator $\hat{B}$ in Matrixform bzgl. der orthonormierten Basiszustände $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ gegeben:

$$A^{\{e\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B^{\{e\}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

   a) Können den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ Observablen zugeordnet werden? Was sind in diesem Fall die möglichen Messwerte bei der Messung von A und B?

   b) Sind die Observablen A und B kompatibel, d.h. können sie gleichzeitig scharf gemessen werden? Was sind in dem Fall die möglichen Messwertpaare?

   c) Ist der Zustand des Systems durch die Angabe eines Eigenwerts von $\hat{A}$ oder $\hat{B}$ alleine bereits eindeutig festgelegt oder ergeben erst A und B gemeinsam einen vollständigen Satz kompatibler Observablen?

2. In einem dreidimensionalen komplexen Hilbertraum sind der Operator $\hat{A}$ und der Operator $\hat{B}$ durch ihre Wirkung auf die orthonormierten Basiszustände $|\phi_i\rangle$ gegeben:

$$\begin{aligned}
\hat{A}\,|\phi_1\rangle &= 6\,|\phi_1\rangle + i\sqrt{8}\,|\phi_2\rangle + 2\,|\phi_3\rangle\,, & \hat{B}\,|\phi_1\rangle &= |\phi_1\rangle - i\sqrt{2}\,|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle \\
\hat{A}\,|\phi_2\rangle &= -i\sqrt{8}\,|\phi_1\rangle + 4\,|\phi_2\rangle + i\sqrt{8}\,|\phi_3\rangle\,, & \hat{B}\,|\phi_2\rangle &= i\sqrt{2}\,|\phi_1\rangle - i\sqrt{2}\,|\phi_3\rangle \\
\hat{A}\,|\phi_3\rangle &= 2\,|\phi_1\rangle - i\sqrt{8}\,|\phi_2\rangle + 6\,|\phi_3\rangle\,, & \hat{B}\,|\phi_3\rangle &= |\phi_1\rangle + i\sqrt{2}\,|\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle
\end{aligned}$$

   a) Schreiben Sie die Matrizen $A^{\{\phi\}}$ und $B^{\{\phi\}}$ an, die den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ entsprechen.

   b) Untersuchen Sie, ob die beiden Observablen A und B gleichzeitig scharf gemessen werden können.

   c) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $\hat{A}$ und $\hat{B}$, deren Entartungsgrad, sowie ein Orthonormalsystem $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |g_3\rangle\}$ *gemeinsamer* Eigenvektoren von $\hat{A}$ und $\hat{B}$. Diagonalisieren Sie dazu zunächst die Matrix $A^{\{\phi\}}$ und stellen Sie dann den Operator $\hat{B}$ in der Eigenbasis von $A^{\{\phi\}}$ dar.

      Wie lauten die möglichen Messwertpaare bei gleichzeitiger Messung der beiden Observablen?

d) Zeigen Sie, dass die gemeinsamen Eigenvektoren $\{|g_1\rangle,\, |g_2\rangle,\, |g_3\rangle\}$ auch Eigenvektoren von $\hat{A}\hat{B}$ bzw. $\hat{A}+i\hat{B}$ sind. Wie lauten die dazugehörigen Eigenwerte?

e) Welche Matrizen $A^{\{g\}}$ und $B^{\{g\}}$ sind den beiden Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ in der Basis $\{|g_1\rangle,\, |g_2\rangle,\, |g_3\rangle\}$ zugeordnet? Berechnen Sie die Spur der Matrizen in den Basen $\{\phi\}$ und $\{g\}$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

f) Entscheiden Sie, welche der folgenden Kombinationen einen vollständigen Satz kompatibler Observablen bilden: $\{A\}, \{B\}, \{A, B\}, \{A, B^2\}$

Hinweis: Für die auftretenden Matrix-Rechenoperationen können Sie auf elektronische Hilfsmittel Ihrer Wahl zurückgreifen, siehe z.B.: `wolframalpha.com/examples/Matrices.html`

Zu kreuzen (online im *tuwel*-Kurs zur LVA): 1/2abc/2def