6. Tutorium VU Quantentheorie I – Lösungen, 27.11.2015

1. a) Den Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ können Observablen zugeordnet werden, da die Matrizen $A^{\{e\}}, B^{\{e\}}$ und somit auch die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ selbst hermitesch sind. Die möglichen Messwerte sind die Eigenwerte der Matrizen, $a_1 = 1, a_2 = 2$ bzw. $b_1 = 3, b_2 = 4$.

   b) Die Observablen A und B sind kompatibel, da die Operatoren $\hat{A}$ und $\hat{B}$ kommutieren, $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$. Die möglichen Messwertpaare sind die Eigenwerte zum gleichen (gemeinsamen) Eigenzustand, $\{a_1{=}1, b_1 = 3\}$ und $\{a_2{=}2, b_2{=}4\}$.

   c) Da keine Entartung vorliegt, legt die Angabe von a_i *oder* b_i alleine den (gemeinsamen) Eigenzustand bereits eindeutig fest.

2. a)

$$A^{\{\phi\}} = \begin{pmatrix} 6 & -i\sqrt{8} & 2 \\ i\sqrt{8} & 4 & -i\sqrt{8} \\ 2 & i\sqrt{8} & 6 \end{pmatrix}, \quad B^{\{\phi\}} = \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{2} & 1 \\ -i\sqrt{2} & 0 & i\sqrt{2} \\ 1 & -i\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

   b) $[\hat{A}, \hat{B}] = 0 \Rightarrow A$ und B können gleichzeitig scharf gemessen werden.

   c) Die Eigenwerte lauten $a_1 = 0, a_{2,3} = 8$ bzw. $b_1 = -2, b_{2,3} = 2$. Die Darstellung des Operator $\hat{B}$ in der Eigenbasis von $A^{\{\phi\}}$ ist nicht eindeutig, da die Wahl der orthonormierten Eigenvektoren im entarteten Unterraum von $\hat{A}$ nicht eindeutig ist. Im Allgemeinen ist $B^{\{a\}}$ blockdiagonal, nur wenn die gewählte Eigenbasis von $A^{\{\phi\}}$ (zufällig) bereits die gemeinsamen Eigenvektoren enthält, ist $B^{\{a\}}$ diagonal. Diagonalisieren von $B^{\{a\}}$ liefert in jedem Fall die eindeutig bestimmten gemeinsamen Eigenvektoren.

$$|g_1\rangle \overset{\{\phi\}}{\to} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad |g_2\rangle \overset{\{\phi\}}{\to} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad |g_3\rangle \overset{\{\phi\}}{\to} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

   Die dazugehörigen möglichen Messwertpaare lauten $\{a_{2,3}{=}8, b_{2,3} = 2\}$, $\{a_{2,3}{=}8, b_1 = -2\}$, $\{a_1{=}0, b_{2,3} = 2\}$.

   d) Explizites Diagonalisieren von $\hat{A}\hat{B}$ bzw. $\hat{A} + i\hat{B}$ in der $\{\phi\}$-Darstellung liefert wieder die Eigenvektoren $\{|g_1\rangle, |g_2\rangle, |g_3\rangle\}$. Die dazugehörigen Eigenwerte lauten $a_{2,3} \cdot b_{2,3}$, $a_{2,3} \cdot b_1$ und $a_1 \cdot b_{2,3}$ bzw. $a_{2,3} + ib_{2,3}$, $a_{2,3} + ib_1$ und $a_1 + ib_{2,3}$.

e) In der gemeinsamen Eigenbasis sind beide Matrizen diagonal:

$$A^{\{g\}} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B^{\{g\}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Spur einer Matrix ist invariant bzgl. Basistransformationen und entspricht immer dem Produkt der Eigenwerte (die naturgemäß auch in jeder Basis dieselben sind). Es gilt also $\mathrm{Spur}(\hat{A}) = 16$, $\mathrm{Spur}(\hat{B}) = 2$.

f) Nur $\{A, B\}$ bildet einen vollständigen Satz kompatibler Observablen, d.h. die dazugehörigen Eigenwertpaare legen einen Zustand des Hilbertraums eindeutig fest.