7. Tutorium VU Quantentheorie I, 04.12.2015

1. Die Ortsdarstellung eines Energieeigenzustandes des harmonischen Oszillators ist

$$\langle x \,|\, n\rangle = u_n(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega}{\hbar}x^2} H_n\left(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, x\right),$$

wobei $H_n(x)$ das n-te Hermite-Polynom bezeichnet.

a) Rechnen Sie in der Ortsdarstellung explizit nach, dass gilt:
- $\hat{a}^\dagger\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$
- $\hat{a}\,|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

Stellen Sie dazu den Erzeuger (Vernichter) als Linearkombination des Orts- und Impulsoperators dar und verwenden Sie

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x), \qquad \frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

b) Stellen Sie den Vernichtungsoperator a durch x und $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ dar. Berechnen Sie explizit die Grundzustandsfunktion $\psi_0(x) = \langle x|0\rangle$ des harmonischen Oszillators, indem Sie die Differentialgleichung $a\psi_0(x) = 0$ lösen.

c) Berechnen Sie explizit $\psi_1(x) = \langle x|1\rangle$, indem Sie $a^\dagger$ auf $\psi_0(x)$ wirken lassen.

2. Der Zustand eines linearen harmonischen Oszillators sei zu einem bestimmten Zeitpunkt durch die folgende Linearkombination des Grundzustandes $|0\rangle$ und des zweiten angeregten Energieeigenzustandes $|2\rangle$ gegeben:

$$|\psi\rangle = \frac{i}{\sqrt{5}}|0\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}|2\rangle$$

Berechnen Sie für diesen Zustand die Erwartungswerte der kinetischen Energie $\langle E_{\text{kin}}\rangle$ und der Gesamtenergie $\langle E\rangle$, sowie deren Unschärfen (Standardabweichungen) $\sigma_{E_{\text{kin}}}$ und σ_E mit Hilfe der Leiteroperatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$.

3. Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m im eindimensionalen Potential $V(x)$:

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} \frac{1}{\cosh^2(ax)}, \; a > 0$$

   a) Begründen Sie, warum es sich bei dem im 4. Tutorium untersuchten Eigenzustand $\psi_0(x)$ dieses Potentials um den Grundzustand des Systems handelt.
   b) Nähern Sie das Potential $V(x)$ durch ein geeignetes harmonisches Oszillator-Potential an. Vergleichen Sie die resultierende Grundzustandsenergie $\bar{E}_0$ mit der exakten Lösung aus dem 4. Tutorium.
   c) Bestimmen Sie außerdem die zu $\bar{E}_0$ gehörige genäherte Grundzustandswellenfunktion $\bar{\psi}_0(x)$ und untersuchen Sie (numerisch) das Überlapp-Integral mit dem exakten Grundzustand $\psi_0(x)$ für $a = 1$.
   d) Diskutieren Sie die Qualität Ihrer Näherung. Was erwarten Sie für angeregte Zustände (ohne Rechnung)?

4. Ein Teilchen der Masse m befindet sich im eindimensionalen Potential

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0 \\ \frac{m\omega^2}{2} x^2 & x \geq 0 \end{cases} .$$

   Wie lauten die Energieeigenwerte und (normierten) Energieeigenfunktionen des Problems?

   Hinweis: Verwenden Sie zur schnellen Lösung des Problems die Eigenschaften der Eigenfunktionen des harmonischen Oszillators, die sie als bekannt voraussetzen können.

Zu kreuzen (online im *tuwel*-Kurs zur LVA): Zu kreuzen: 1a/1bc/2/3/4