

## 7. Tutorium VU Quantentheorie I – Lösungen, 04.12.2015

1. a) Es gilt  $\hat{a}^\dagger |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{x_0} \pm x_0 \frac{d}{dx} \right) N_n e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} H_n \left( \frac{x}{x_0} \right)$ , wobei  $N_n$  die Normierung der  $n$ -ten harmonischen Oszillatorfunktion ist und  $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$  gilt. Verwendung der angegebenen Beziehungen für Hermitpolynome und  $\frac{N_n}{\sqrt{2}} = \sqrt{n+1} N_{n+1}$  führt auf die bekannten Beziehungen für die Leiteroperatoren.
- b) Ausdrücken des Vernichtungsoperators durch  $x$  und  $p = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$  führt auf die Differentialgleichung  $\frac{d}{dx} \Psi_0(x) = -\frac{m\omega x}{\hbar} \Psi_0(x)$  mit der Lösung  $\Psi_0(x) = N e^{-\alpha x^2}$ . Normieren führt auf den bekannten Ausdruck für die Grundzustandsfunktion:  

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0 \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}$$
- c) Ausdrücken des Erzeugungsoperators durch  $x$  und  $p = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx}$  und Anwenden auf die Grundzustandswellenfunktion  $\Psi_0(x)$  führt unter Verwendung von  $2 \frac{x}{x_0} = H_1 \left( \frac{x}{x_0} \right)$  auf  $\Psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2x_0 \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} H_1 \left( \frac{x}{x_0} \right)$ .

2.  $\langle E \rangle = \frac{21}{10} \hbar \omega$ ,  $\langle E^2 \rangle = \frac{101}{20} \hbar^2 \omega^2$ ,  $\sigma_E = \frac{4}{5} \hbar \omega$

$$\langle E_{kin} \rangle = \frac{21}{20} \hbar \omega$$
,  $\langle E_{kin}^2 \rangle = \frac{159}{80} \hbar^2 \omega^2$ ,  $\sigma_{E_{kin}} = \frac{\sqrt{354}}{20} \hbar \omega$

3. a) Der im 4. Tutorium behandelte Eigenzustand weist keine Knoten und muss daher der Grundzustand sein (Knotenregel).
- b) Um  $V(x)$  durch ein geeignetes harmonisches Potential annähern zu können, entwickeln wir  $V(x)$  bei  $x = 0$ , dem Minimum des angegebenen Potentials, in eine Taylorreihe. Das führt auf  $V(x) \approx -\frac{\hbar^2 a^2}{m} [1 - a^2 x^2]$ . Die Grundzustandsenergie des genäherten Potentials ist  $\tilde{E}_0 = -\frac{\hbar^2 a^2}{m} + \frac{\hbar \omega}{2}$  mit  $\omega = \frac{\sqrt{2} a^2 \hbar}{m}$ . Bei Vergleich mit der exakten Eigenenergie  $E_0$  aus dem 4. Tutorium  $E_0 = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m}$  sehen wir  $\tilde{E}_0 = -\frac{\hbar^2 a^2}{2m} (2 - \sqrt{2}) \approx -\frac{\hbar^2 a^2}{2m} \cdot 0.58 = 0.58 E_0$ . Die genäherte Energie stimmt also zu ca. 60% mit der exakten Eigenenergie überein.
- c) Die Grundzustandswellenfunktion des genäherten Potentials ist für  $a = 1$ :

$$\tilde{\Psi}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0 \sqrt{\pi}}} e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} \text{ mit } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \text{ und } \omega = \frac{\sqrt{2}\hbar}{m}$$

Für das Überlapp-Integral erhält man  $\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}_0(x) \Psi_0(x) dx \approx 0.966$ .

d) Plotten der beiden Wellenfunktionen zeigt, dass die genäherte Eigenfunktion  $\tilde{\Psi}_0(x)$  und die exakte Eigenfunktion  $\Psi_0(x)$  nicht perfekt miteinander übereinstimmen, obwohl das Überlappintegral beinahe 1 gibt. Für angeregte Zustände erwarten wir, dass die genäherte Lösung immer schlechter mit der exakten Lösung übereinstimmt, da das angegebene Potential für höhere Energien immer mehr vom Oszillatorpotential abweicht. Insbesondere besitzt das Oszillatorpotential unendlich viele angeregte Zustände (mit konstantem Abstand), während  $V(x)$  für  $E > 0$  ungebundene Streuzustände aufweist.

4. Die Wand bei  $x = 0$  bewirkt, dass nur die ungeraden Lösungen des harmonischen Oszillators zulässig sind, da diese die Randbedingung  $\Psi(x=0) = 0$  erfüllen. Die Eigenfunktionen müssen zudem renormiert werden, da gilt  $\Psi(x \leq 0) = 0$ . Das führt auf folgende Eigenfunktionen und Eigenwerte:

$$\Psi_m(x) = \frac{\Theta(x)e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}}}{\sqrt{x_0\sqrt{\pi}2^{2m}(2m+1)!}} H_{2m+1}\left(\frac{x}{x_0}\right) \text{ mit } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad E_m = \left(2m + \frac{3}{2}\right)\hbar\omega$$