8. Tutorium VU Quantentheorie I, 11.12.2015

1. Gegeben sei eine operatorwertige Funktion $\hat{F}(\hat{A})$ eines hermiteschen Operators $\hat{A}$, die durch eine Potenzreihe darstellbar ist,

$$\hat{F}(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \hat{A}^n \ \text{, wobei } f_n \in \mathbb{R} \ \text{ und } \ \hat{A}^n = \prod_{i=1}^{n} \hat{A}\,.$$

   a) Zeigen Sie, dass auch $\hat{F}(\hat{A})$ in diesem Fall hermitesch ist.

   b) Sind die Eigenvektoren von $\hat{A}$ auch Eigenvektoren von $\hat{F}(\hat{A})$? Was erhält man in dem Fall für die Eigenwerte von $\hat{F}(\hat{A})$?

   c) Geben Sie basierend auf Ihren Resultaten aus (b) die Spektraldarstellung von $\hat{F}(\hat{A})$ an.

   d) Gegeben seien ein Operator $\hat{S}$ bezüglich einer beliebigen Basis $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ ($\{e\}$-Darstellung),

$$S^{\{e\}} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

   und eine reelle Konstante α. Berechnen Sie den Operator $\hat{U} = \exp(i\alpha\hat{S})$ in der $\{e\}$-Darstellung, einerseits durch direkte Taylorreihenentwicklung und andererseits mit Hilfe der Resultate aus (c) unter Verwendung der Spektraldarstellung von $\hat{S}$.

   Hinweis: Untersuchen Sie für die Berechnung von $\hat{U}$ über eine Taylorreihe zunächst wie sich wiederholtes Multiplizieren von $S^{\{e\}}$ mit sich selbst auswirkt.

2. Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem harmonischen Potential mit dem Hamiltonoperator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2\hat{x}^2}{2}$. Zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ ist der Zustand des Teilchens durch folgende Linearkombination von Energieeigenzuständen gegeben:

$$|\psi(t\!=\!0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|0\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}|1\rangle$$

   Schreiben Sie $|\psi(t)\rangle$ für einen beliebigen Zeitpunkt t an. Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$, $\langle\hat{p}\rangle$ und $\langle\hat{H}\rangle$ als Funktion von t.

3. Gegeben sei ein eindimensionaler, harmonischer Oszillator, $V(x) = m\omega^2 x^2/2$. Betrachten Sie die kohärenten Oszillatorzustände $|\alpha\rangle$, die Eigenzustände des Vernichtungsoperators $\hat{a}$ zum Eigenwert α sind,

$$|\phi_\alpha\rangle = |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle\,,$$

wobei $|n\rangle$ die Energieeigenzustände des harmonischen Oszillators sind. Die Zeitentwicklung der kohärenten Zustände lautet (siehe Plenum vom 03.12.2015)

$$|\phi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega t/2}|\alpha_t\rangle = e^{-i\omega t/2}|e^{-i\omega t}\alpha\rangle \tag{1}$$

mit dem zeitabhängigen Eigenwert $\alpha_t = \alpha e^{-i\omega t}$. Berechnen Sie damit für einen beliebigen Zeitpunkt t

a) die Erwartungswerte $\langle\hat{x}\rangle$ und $\langle\hat{x}^2\rangle$,

b) die Erwartungswerte $\langle\hat{p}\rangle$ und $\langle\hat{p}^2\rangle$,

c) sowie das Unschärfeprodukt $\sigma_x \cdot \sigma_p$.

4. Schreiben Sie den zeitabhängigen kohärenten Zustand $|\phi_\alpha(t)\rangle$ aus dem 3. Beispiel im Ortsraum an, d.h. bestimmen Sie $\langle x|\phi_\alpha(t)\rangle$.

a) Zeigen Sie dazu zunächst, dass sich $|\phi_\alpha(t)\rangle$ auch in der Form

$$|\phi_\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\frac{-i\omega t}{2}} e^{\alpha_t \hat{a}^\dagger}\,|0\rangle$$

darstellen lässt.

b) Stellen Sie dann den Erzeuger-Operator $\hat{a}^\dagger$ mit Hilfe des Orts- und Impulsoperators dar und verwenden Sie die Baker-Campbell-Hausdorff Formel $e^{\hat{A}+\hat{B}} = e^{\hat{A}} e^{\hat{B}} e^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$, um die Operatoren auf getrennte Exponenten zu verteilen.

c) Lassen Sie dann die Operatoren auf den Grundzustand $|0\rangle$ im Ortsraum wirken. Stellen Sie den exponenzierten Impulsoperator als Potenzreihe dar um seine Wirkung auf Funktionen im Ortsraum zu verstehen.

d) Bestimmen Sie abschließend die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\phi_\alpha(x,t)|^2$ und diskutieren Sie das Ergebnis im Zusammenhang mit den Resultaten aus Beispiel 3.

Zu kreuzen (online im *tuwel*-Kurs zur LVA): Zu kreuzen: 1/2/3/4