8. Tutorium VU Quantentheorie I – Lösungen, 11.12.2015

1. a) Aus $(\hat{A}^\dagger)^n = \hat{A}^n$ und $f_n^* = f_n$ folgt die Hermitizität jedes Summanden der Potenzreihe und somit der Funktion $\hat{F}(\hat{A})$.

   b) $\hat{A}\,|a_i\rangle = a_i\,|a_i\rangle$
   $\Rightarrow \hat{F}(\hat{A})\,|a_i\rangle = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n \hat{A}^n\,|a_i\rangle = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n a_i^n\,|a_i\rangle = F(a_i)\,|a_i\rangle$
   $\Rightarrow$ Eigenvektoren $|a_i\rangle$ von $\hat{A}$ sind Eigenvektoren von $\hat{F}$ mit Eigenwerten $F(a_i)$.

   c) $\hat{F}(\hat{A}) = \sum\limits_i |a_i\rangle\, F(a_i)\,\langle a_i|$

   d) In der Matrixdarstellung von $\hat{S}$ lässt sich leicht zeigen, dass $\hat{S}^{2n+1} = \hat{S}$ und $\hat{S}^{2n} = \mathbb{1}$, mit $n \in \mathbb{N}$ gilt. Damit kann man bei der Potenzreihe der Exponentialfunktion in den geraden und ungeraden Potenzen jeweils $\mathbb{1}$ bzw. $\hat{S}$ herausheben und erhält:
   $\hat{U} = \mathbb{1}\cos\alpha + i\hat{S}\sin\alpha\,,\quad$ bzw. $\quad \hat{U} \stackrel{\{e\}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

   Das Eigensystem des Operator $\hat{S}$ ist
   $|s_+\rangle \stackrel{\{e\}}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{i}{1},\ |s_-\rangle \stackrel{\{e\}}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{2}}\binom{-i}{1}$, wobei $\hat{S}\,|s_\pm\rangle = \pm\,|s_\pm\rangle$.
   Wie in Aufgabe (a) gezeigt gilt nun auch $\hat{U}\,|s_\pm\rangle = \exp(i\alpha\hat{S})\,|s_\pm\rangle = \exp(\pm i\alpha)\,|s_\pm\rangle$.
   Einsetzen in die Spektraldarstellung liefert wieder:
   $\hat{U} \stackrel{\{e\}}{\rightarrow} \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

2. Anwenden des Zeitenwicklungsoperators liefert $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\omega t}{2}}\sqrt{\frac{2}{3}}\,|0\rangle - e^{-\frac{3i\omega t}{2}}\sqrt{\frac{i}{3}}\,|1\rangle$.
   Mit der Darstellung der Operatoren als Erzeuger und Vernichter (siehe Skriptum) erhält man mit $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$: $\langle\hat{x}\rangle = -\frac{2}{3}x_0\sin(\omega t)$, $\langle\hat{p}\rangle = -\frac{2}{3}\frac{\hbar}{x_0}\cos(\omega t)$, $\left\langle\hat{H}\right\rangle = \frac{5\hbar\omega}{6}$

3. Mithilfe von $\hat{a}\,|\phi_\alpha(t)\rangle = \alpha(t)\,|\phi_\alpha(t)\rangle$ bzw. $\langle\phi_\alpha(t)|\,\hat{a}^\dagger = \langle\phi_\alpha(t)|\,\alpha^*$ erhält man mit $\alpha = |\alpha|e^{i\delta}$:

   a) $\langle\hat{x}\rangle = \sqrt{2}x_0|\alpha|\cos(\omega t - \delta)$, $\langle\hat{x}^2\rangle = \frac{x_0^2}{2}(4|\alpha|^2\cos^2(\omega t - \delta) + 1)$

   b) $\langle\hat{p}\rangle = -\frac{\sqrt{2}\hbar}{x_0}|\alpha|\sin(\omega t - \delta)$, $\langle\hat{p}^2\rangle = \frac{\hbar^2}{2x_0^2}(4|\alpha|^2\sin^2(\omega t - \delta) + 1)$

   c) $\sigma_x \cdot \sigma_p = \frac{\hbar}{2}$

4. Mithilfe der Rechnungen aus (a)–(c) erhält man (siehe Skriptum):
   $|\phi_\alpha(t)|^2 = \frac{1}{x_0\sqrt{\pi}}e^{-\frac{(x-|\alpha|\cos(\omega t-\delta)x_0\sqrt{2})^2}{x_0^2}}$