9. Tutorium VU Quantentheorie I, 18.12.2015

1. Berechnen Sie unter Verwendung der kanonischen Kommutatorbeziehungen $[x_i, x_j] = 0$, $[p_i, p_j] = 0$, $[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ die Kommutatoren $[L_i, x_j]$ und $[L_i, p_j]$ von Orts- und Impulsoperator mit dem Drehimpulsoperator. Verwenden Sie Ihre Ergebnisse und die Kommutatorbeziehungen aus dem 1. Beispiel des 5. Tutoriums zur Berechnung von:
   a) $[L_i, L_j]$
   b) $[L_i, r^2]$ und $[L_i, p^2]$

   Diskutieren Sie die Konsequenzen dieser Resultate!

2. Betrachten Sie eine Basis die aus den normierten Eigenzustände $|l, m_z\rangle = |l, m\rangle$ der Drehimpulsoperatoren L^2 und L_z für *fixes* $l=1$ und $m=-1, 0, 1$ gebildet wird.
   a) Für die Leiteroperatoren $L_\pm = L_x \pm iL_y$ gilt
   $$L_\pm \,|\, l, m\,\rangle \;=\; \hbar\sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)}\,|\, l, m \pm 1\,\rangle\,.$$
   Wie lautet ihre Matrixdarstellung in der gegebenen Basis?
   b) Schreiben Sie auch die Matrixdarstellung der Operatoren L_x, L_y und L_z bezüglich der gegebenen Basis an. Verifizieren Sie anhand der resultierenden Matrizen die Beziehung $[L_x, L_y] = i\hbar L_z$.
   c) Wie lauten die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrizen für L_x und L_+? Diskutieren Sie Ihr Ergebnis.
   d) Ein Teilchen befinde sich im Drehimpulszustand $|l, m_x\rangle = |1, 1\rangle$. Wie wahrscheinlich ist es in dem Fall bei einer Messung der z-Komponente des Drehimpulses den Wert $\hbar$ zu messen?

3. Gegeben sei ein Teilchen in $\mathbb{R}^3$, das durch die Wellenfunktion
   $$\psi(x, y, z) = \frac{1}{N}\,(x + y + z)\,\exp[-(r/a)^2], \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad a, N \in \mathbb{R}$$
   beschrieben wird.
   a) Bestimmen Sie mit welchen Wahrscheinlichkeiten alle für diese Wellenfunktion möglichen Messwerte der Observablen L^2 und L_z auftreten? Stellen Sie dazu die Winkelverteilung der Wellenfunktion $\psi(x, y, z)$ mit Hilfe der entsprechenden Kugelflächenfunktionen dar.
   b) Berechnen Sie die Erwartungswerte $\langle L_x\rangle$, $\langle L_y\rangle$, $\langle L_z\rangle$ für den gegebenen Zustand.

4. Betrachten Sie den Rotationsfreiheitsgrad eines Chlormoleküls (Cl_2), das durch zwei starr verbundene Atome im (mittleren) Abstand $d \sim 2\,\text{Å}$ angenähert werden soll.

   a) Überlegen Sie, wie die Rotationsenergie des Moleküls mit seinem Trägheitsmoment und seinem Drehimpuls in Zusammenhang steht. Erläutern Sie, wie Sie auf Basis dieses klassischen Zusammenhangs und durch die quantenmechanische Drehimpulsquantisierung diskrete Niveaus für die Rotationsenergie erhalten.

   b) Schätzen Sie den Abstand zwischen benachbarten Energieniveaus im Rotationsspektrum von Cl_2 ab.

   c) Mit Strahlung welcher Frequenz kann man einen Übergang vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand des Rotationsspektrums anregen?

Zu kreuzen (online im *tuwel*-Kurs zur LVA): 1/2/3/4