Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi , Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch , DI T. Ribic

Nachtest aus Quantenmechanik I

Wintersemester 2016/2017

Freitag, 10.3.2017.

Test A **Name:** **Matrikelnr.:**

A1	A2	A3	A4	Σ
10	11+4*	15	14	50+4*

1. 2-dimensionaler Rotator im E-Feld *5+5=10 Punkte*

Betrachten Sie einen quantenmechanischen Rotator in zwei Dimensionen mit dem Hamilton-Operator

$$H = -\frac{\hbar^2}{2I}\left(\frac{d}{d\phi}\right)^2. \tag{1}$$

Der einzige Freiheitsgrad des Rotators ist der Winkel ϕ, welcher Werte zwischen 0 und 2π (mit periodischen Randbedingungen) annehmen kann. Das Trägheitsmoment I ist eine als bekannt vorauszusetzende, positive reele Zahl.

a) Geben Sie die exakten Eigenfunktionen und Eigenwerte des Hamilton-Operators als Lösungen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung an.

b) Der Hamilton-Operator wird durch Anlegen eines konstanten elektrischen Feldes gestört. Das Störpotential ist gegeben durch $V(\phi) = -Eqr\cos(\phi)$, dabei ist E die Feldstärke des elektrischen Feldes, q die Ladung des Rotators und r der Abstand der Ladung zum Ursprung. Alle drei Konstanten sind reel. Berechnen Sie die Grundzustandsenergiekorrekturen bis zur zweiten Ordnung Störungstheorie

2. Theorie-Aufgaben *3+4+4+4*=11+4* Punkte*

a) Gegeben ist ein zeitunabhängiger Hamilton-Operator H. Zeigen Sie, dass die Norm der Wellenfunktion, die die Schrödinger-Glg. mit H löst, zeitunabhängig ist.

b) Gegeben ist der Hamilton-Operator H für (i) das spinlose Wasserstoff-Atom und (ii) ein eindimensionales freies Teilchen. Ergänzen Sie H mit Observablen Ihrer Wahl jeweils zu einem vollständigen System kommutierender Observablen (VSKO)(ohne Beweis).

c) Gegeben ist der eindimensionale harmonische Oszillator und ein Störterm $V = -\alpha x$. Für welche Werte von α wird in Störungstheorie erster und zweiter Ordnung die Grundzustandsenergie durch den Störterm gesenkt? (mit ausführlicher Begründung)

d) Gegeben ist der Hamilton-Operator zum Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{für } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 & \text{für } x > 0 \end{cases} \tag{2}$$

Drücken Sie die Eigenfunktionen dieses Problems durch die Eigenfunktionen $\psi_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ des harmonischen Oszillators aus. Geben Sie die Grundzustandsenergie an.

3. Doppelter Potentialtopf *5+2+3+2+3=15 Punkte*

Ein eindimensionales Teilchen der Masse m befindet sich im Potential V:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -2a < x < -a \quad \text{und} \quad b < x < 2b \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \tag{3}$$

Dabei sind a und b bekannte, positive Konstanten mit der Dimension einer Länge.

a) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Hamilton-Operators.

b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im Zustand

$$\psi(x, t = 0) = \begin{cases} 1/\sqrt{a}\ \sin(\pi(x + 2a)/a) & -2a < x < -a \\ i/\sqrt{b}\ \sin(2\pi(x - b)/b) & b < x < 2b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{4}$$

Bestimmen Sie die Zeitentwicklung des Zustandes $\psi(x, t)$.

c) Berechnen Sie den Erwartungswert einer Messung des Ortsoperators x für obigen Zustand zum Zeitpunkt $t_1 > 0$.

d) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im obigen Zustand zu einem Zeitpunkt $t_2 > 0$ im Bereich zwischen $x = b$ und $x = 2b$ anzutreffen.

e) Bestimmen Sie die Entartung des Grundzustandes, sowie des ersten und zweiten angeregten Zustand des Systems für $b = 2a$.

4. Übergänge im Atom *5+5+4=14 Punkte*

Wir betrachten ein Atom im Unterraum, der von s und p-Orbitalen aufgespannt wird. Die Matrixdarstellung des Hamilton-Operators H und des Drehimpuls-Operators L^2 in diesem Unterraum in der Basis $|\, s\,\rangle, |\, p_x\rangle, |\, p_y\rangle, |\, p_z\rangle$ ist gegeben durch:

$$H_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon_p \end{bmatrix}, \qquad L^2 = \hbar^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Hierbei geben ε_s und ε_p die Energien der atomaren Wellenfunktionen an. Die Ortsdarstellungen der Wellenfunktionen sind gegeben durch: $\langle \vec{r}\,|\, s\,\rangle = f_s(r)$, $\langle \vec{r}\,|\, p_\alpha\rangle = \frac{\alpha}{r} f_p(r)$, $\alpha \in \{x, y, z\}$, $r = |\vec{r}|$.

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System in dem Zustand

$$|\psi(t = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\, s\,\rangle - \frac{i}{2}|\, p_y\rangle + \frac{i}{2}|\, p_z\rangle. \tag{6}$$

Bestimmen Sie die möglichen Messwerte einer Messung L^2 zu einem Zeitpunkt $t_1 > 0$. Geben Sie für jeden möglichen Messwert auch die kollabierte Wellenfunktion unmittelbar nach der Messung an.

b) An das Atom wird ein elektrisches Potential mit der Ortsdarstellung $V(x, y, z) = Eqz$ als zusätzlicher Beitrag zum Hamilton-Operator angelegt, wobei E und q bekannte, reele Konstanten sind. Geben Sie die Darstellung dieses Potentiales als Matrix in oben genanntem Unterraum an. Welche Matrixelemente sind null? Eventuell auftretende Integrale brauchen Sie nicht explizit auszuführen

c) Bestimmen Sie anschließend die Energieeigenwerte des entstehenden Systems $H = H_0 + V$. Eventuell auftretende Integrale brauchen Sie nicht explizit auszuführen.

Viel Erfolg!