Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi , Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch , DI T. Ribic

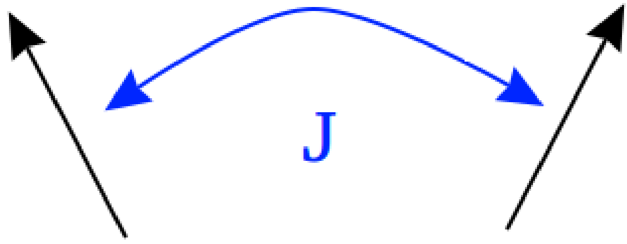
1. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2016/2017

TUTORIUM: Freitag, 14.10.2016.

1. Heisenberg Modell für 2 Spins

1+1+2+1=5 Punkte



Wir betrachten ein System aus zwei miteinander wechselwirkenden Spins. Jeder der beiden Spins kann Werte von $\pm 1/2$ annehmen. Wir betrachten die Basis

$$\begin{pmatrix} |\uparrow,\uparrow\rangle \\ |\uparrow,\downarrow\rangle \\ |\downarrow,\uparrow\rangle \\ |\downarrow,\downarrow\rangle \end{pmatrix} \tag{1}$$

wobei $|\uparrow,\downarrow\rangle$ den Zustand beschreibt, in dem das linke Teilchen in positive z-Richtung polarisiert ist und das rechte in negative z-Richtung usw. Wie wir später in der Vorlesung noch feststellen werden, kann der quantenmechanische Hamilton-Operator dafür in Form der Matrix

$$H = -J \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

geschrieben werden. Dabei ist J eine als bekannt angenommene Konstante.

a) Finden Sie die Eigenwerte E_j und Eigenvektoren $|\Psi_j\rangle$ des Systems. (d. h. der Matrix)

b) Berechnen sie außerdem ausgehend von der *Schrödinger-Gleichung* für das Heisenberg-Modell ($\hbar \equiv 1$)

$$i\frac{d}{dt}\Psi(t) = H\Psi(t) \tag{3}$$

die Zeitentwicklung der Eigenvektoren, d.h. $|\Psi(t=0)\rangle = |\Psi_j\rangle$. Dabei bezeichnet i die komplexe Einheit und d/dt die Zeitableitung.

c) Finden Sie die Zeitentwicklung des Zustandes $\Psi(t=0) = (0,1,0,0)^T$.

Für die Quantenmechanik spielen Kommutatorrelationen zwischen Operatoren, welche physikalische Observablen beschreiben, eine große Rolle. [1]

d) Berechnen Sie den Kommutator der Operatoren

$$\sigma_z^{total} = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \sigma_y^{links} = \hbar/2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_z^{rechts} = \hbar/2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4}$$

mit H.

2. Wiederholung: Lineare Algebra

1+2+1+1=5 Punkte

In der Quantenmechanik wird man sehr oft mit dem Problem der Diagonalisierung von Matrizen konfrontiert. Beispielsweise könnte eine stationäre Schrödingergleichung in einer diskreten Basis wie folgt aussehen (in dimensionslosen Einheiten)

$$H\Psi_j = E_j\Psi_j \tag{5}$$

mit

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

a) Diagonalisieren Sie die Matrix H, d.h. berechnen Sie deren Eigenwerte und Eigenvektoren.

b) Berechnen Sie die Matrix e^{-iHt} und zeigen Sie, dass für einen beliebigen konstanten Vektor Ψ_0 der Vektor

$$\Psi(t) = e^{-iHt}\Psi_0 \tag{7}$$

die Schrödinger-Gleichung (Gleichung 3 in Beispiel 1) erfüllt.

c) Sind die Matrizen H und e^{-iHt} hermitesch ($A^\dagger = A$) bzw. unitär ($A^\dagger A = \mathbb{1}$)?

d) Welche Forderungen an die Eigenwerte λ_j (mit Beweis) und die Eigenbasis Ψ_j(ohne Beweis) implizieren die Eigenschaften hermitesch bzw. unitär einer Matrix A?

[1] Speziell beschreiben Operatoren, welche mit dem Hamilton-Operator kommutieren, Symmetrien des Systems.