Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi , Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch , DI T. Ribic

2. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2016/2017

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 21.10.2016.

3. Streuung an einem δ-Potential

1+1+1+1=4 Punkte

Gehen Sie von der 1-dimensionalen stationären Schrödingergleichung mit dem Potential

$$V(x) = \alpha\, \delta\left(\frac{2m}{\hbar^2}\, x\right) \tag{1}$$

aus. Dabei sei δ die delta-Distribution und α eine positive Konstante. Die Masse m ist als bekannt anzunehmen.

a) Überlegen Sie, wie die Anschlussbedingungen für die Wellenfunktion an der Stelle der Distribution aussehen. Integrieren Sie dazu z.B. die Schrödingergleichung in einem kleinen Bereich $(-\epsilon, +\epsilon)$ um die Position der Distribution. Alternativ setzen Sie eine stückweise stetige Wellenfunktion $\Psi(x) = \Theta(x)\Psi_r(x) + \Theta(-x)\Psi_l(x)$ mit der Stufenfunktion Θ in die Schrödinger-Gleichung ein und führen Sie einen Koeffizientenvergleich durch.

b) Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für eine von links einfallende, nicht normierbare, ebene Welle (e^{ikx}), welche an dem Potential gestreut wird. Insgesamt ergeben sich eine rechts- und eine linkslaufende Welle auf der linken Seite der Distribution ($e^{ikx} + re^{-ikx}$) und eine rechtslaufende Welle (te^{ikx}) auf der rechten Seite.

c) Für welche möglichen Werte der Energie E existieren Lösungen für dieses Problem. Sind die Energien quantisiert (diskret) oder gibt es ein kontinuierliches Spektrum von Eigenenergien?

d) Bestimmen Sie den Transmissions- sowie den Reflexionskoeffizienten. (Sie können in diesem Fall mit $|t|^2$ und $|r|^2$ auf die Wahrscheinlichkeitsdichten der transmittierten und reflektierten Welle schliessen.) In welcher Beziehung stehen die beiden Zahlen zueinander?

4. Schwingungen im unendlich tiefen Potentialtopf

2+1+2+1=6 Punkte

Betrachten Sie einen eindimensionalen, unendlich tiefen Potentialtopf der Breite a mit dem Potential

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq a/2 \\ \infty & |x| > a/2 \end{cases} \tag{2}$$

a) Berechnen Sie die Eigenzustände der stationären Schrödingergleichung für dieses Problem sowie die dazugehörigen Eigenenergien. Durch welche Randbedingungen an zulässige Wellenfunktionen drückt sich das Potential aus?

b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im Zustand

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a}} \cos\left(x\frac{\pi}{a}\right) + i\sqrt{\frac{1}{a}} \sin\left(x\frac{2\pi}{a}\right) & |x| \leq a/2 \\ 0 & |x| > a/2. \end{cases} \tag{3}$$

Bestimmen Sie die Zeitentwicklung des Zustandes, also $\Psi(t, x)$.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte des Ortes und des Impulses als Funktion der Zeit. Wie kann man die Resultate deuten?

d) Wie würden sich die Erwartungswerte von Ort und Impuls als Funktion der Zeit verhalten wenn stattdessen der Zustand

$$\Psi_0(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(x\frac{2\pi}{a}\right) & |x| \leq a/2 \\ 0 & |x| > a/2. \end{cases} \tag{4}$$

als Ausgangszustand angenommen wird? (Rechnung möglich, überzeugende Symmetrieargumente ebenfalls hinreichend)