16

$$V(x) = -Fx$$

$$H\tilde{\psi}(k) = \langle k|H|\psi\rangle = \int dk' \langle k|H|k'\rangle\langle k'|\psi\rangle$$

$$= \int dk' \frac{\hbar^2 k'^2}{2m}\langle k|k'\rangle \tilde{\psi}(k') - F \underbrace{\langle k|\hat{x}|k'\rangle}\tilde{\psi}(k')$$

$$\int dx' \langle k|\hat{x}|x'\rangle\langle x'|k'\rangle$$

$$= \int dx' \, x' \langle k|x'\rangle\langle x'|k'\rangle$$

$$= \int dx' \, x' e^{-ikx'} e^{ik'x'} / (2\pi)$$

$$= \int dx' \, x' e^{ix'(k'-k)} / (2\pi)$$

$$= \frac{1}{i}\frac{d}{dk'} \int dx' \, e^{ix'(k'-k)} / (2\pi)$$

$$= \frac{1}{i}\frac{d}{dk'} \delta(k'-k)$$

$$= \int dk' \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} \delta(k-k')\tilde{\psi}(k') + iF\frac{d}{dk'}\delta(k'-k)\,\tilde{\psi}(k') \qquad \text{Leibniz}$$

$$= \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\tilde{\psi}(k) + iF \underbrace{\int dk' \left(\frac{d}{dk'}\left(\delta(k'-k)\tilde{\psi}(k')\right)\right.}_{0} \left. - \delta(k'-k)\frac{d}{dk'}\tilde{\psi}(k')\right)$$

$$= \frac{\hbar^2 k^2}{2m}\tilde{\psi}(k) - iF\frac{d}{dk}\tilde{\psi}(k) = \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - iF\frac{d}{dk}\right)\tilde{\psi}(k)$$

Zeitabhängige SG:

$$\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - iF\frac{\partial}{\partial k}\right)\tilde{\psi}(k,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(k,t)$$

$$\left(\frac{p^2}{2m} - i\hbar F\frac{\partial}{\partial p}\right)\tilde{\psi}(p,t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}(p,t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\langle p|\psi(t)\rangle\right|^2 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\psi}(p,t)\,\tilde{\psi}^*(p,t)\right)$$

$$= \tilde{\psi}^*(p,t)\frac{\partial}{\partial t}\left(\tilde{\psi}(p,t)\right) + \tilde{\psi}(p,t)\frac{\partial}{\partial t}\psi^*(p,t)$$

$$= \tilde{\psi}^*(p,t)\frac{1}{i\hbar}\left(\frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}(p,t) - i\hbar F\frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}(p,t)\right)$$
$$+ \tilde{\psi}(p,t)\left(\frac{-1}{i\hbar}\right)\left(\frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}^*(p,t) + i\hbar F\frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}^*(p,t)\right)$$

$$= -F\left(\tilde{\psi}^*(p,t)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}(p,t) + \tilde{\psi}(p,t)\frac{\partial}{\partial p}\tilde{\psi}^*(p,t)\right)$$

$$= -F\frac{\partial}{\partial p}\left(\tilde{\psi}(p,t)\,\tilde{\psi}^*(p,t)\right) = -F\frac{\partial}{\partial p}\left|\langle p|\psi(t)\rangle\right|^2$$

$\rightarrow$ $\psi(p,t)$ ist eine komplexe Funktion, deren Phase beliebige Funktionen von p und t enthalten darf. Ihr Betrag muss aber eine Funktion von $(t - \frac{p}{F})$ sein.

b)

Betrachtet man die stationäre SG

$$\left(\frac{p^2}{2m} - i\hbar F\frac{\partial}{\partial p}\right)\tilde{\psi}(p,t) = E\,\tilde{\psi}(p,t)$$

führt der Ansatz $\tilde{\psi}(p,t) = C\exp(iAp^3 + iBp)$

auf $\tilde{\psi}(p,t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar F}\left(Ep - \frac{p^3}{6m}\right)\right)\cdot C$

In Impulsdarstellung ist die DGL also leicht lösbar

Ohne Randbedingungen gibt es keine Einschränkung für E.
Es handelt sich um Kontinuumszustände.

$$\langle\psi_{E_1}|\psi_{E_2}\rangle = |C|^2\int dp\,\exp\left(\frac{i}{\hbar F}(E_1-E_2)p\right) \qquad \text{mit } q = \frac{p}{\hbar F}$$

$$= |C|^2\hbar F\int dq\,\exp\left(i(E_1-E_2)q\right)$$

$$= |C|^2\hbar F\,2\pi\,\delta(E_1-E_2) \overset{!}{=} \delta(E_1-E_2) \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\sqrt{\hbar F 2\pi}}e^{i\alpha}$$

c) $\Psi(x,t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}Et) \cdot \int dp \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar^2}} c \exp(\frac{i}{\hbar F}(Ep - \frac{p^3}{6m})) e^{ipx/\hbar}$

$$= e^{i\theta} \exp(-\frac{i}{\hbar}Et) \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{F\hbar^3}} \int dp \exp\left(\frac{iEp}{\hbar F} - \frac{ip^3}{6m\hbar F} + \frac{ipx}{\hbar}\right)$$

substituiere zunächst $x = \xi \left(\frac{-2mF}{\hbar^2}\right)^{-1/3} - \frac{E}{F}$

$$= e^{i\theta} \exp(-\frac{i}{\hbar}Et) \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{F\hbar^3}} \int dp \exp\left(\cancel{\frac{iEp}{\hbar F}} - \frac{ip^3}{6m\hbar F} - \cancel{\frac{ipE}{\hbar F}} + \frac{ip}{\hbar}\xi\left(\frac{-2mF}{\hbar^2}\right)^{-1/3}\right)$$

substituiere $p = \hbar q \left(\frac{-2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3}$

$$= e^{i\theta} \exp(-\frac{i}{\hbar}Et) \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{F\hbar^3}} \hbar \left(\frac{-2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3} \int dq \exp\left(+\frac{i\cancel{\hbar^3} q^3 (+2\cancel{m}\cancel{F})}{\cancel{\hbar^2} 6\cancel{m}\cancel{\hbar}\cancel{F}} + iq\xi\right)$$

$$= e^{i\theta} \exp(-\frac{i}{\hbar}Et) \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{F\hbar^3}} \hbar \left(\frac{-2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3} \int dq \exp\left(i\left(\frac{q^3}{3} + q\xi\right)\right)$$

mit $Ai(z) = \frac{1}{2\pi} \int \exp\left(i\left(zt + \frac{t^3}{3}\right)\right) dt$

$$= e^{i\theta} \exp(-\frac{i}{\hbar}Et) \frac{1}{\sqrt{F\hbar}} \left(\frac{-2mF}{\hbar^2}\right)^{1/3} Ai(\xi)$$

globale Phase

Zeitentwicklung

Die Wellenfkt in der Abb hat für $x<0$ weniger Energie zur Verfügung als die Höhe des Potentials, daher ist die Lösung keine Welle sondern eine exponentiell abfallende Funktion. Für $x>0$ ist es eine Welle, deren Frequenz mit x zunimmt. Dies entspricht der zunehmenden kinetischen Energie eines klassischen Teilchens welches sich im Potential nach unten bewegt.