Muster Lösung

Rot für Test B

A1 Theoriefragen

a) b) Nein. $Y_{\ell m}(\theta, \phi) \sim e^{im\phi}$

eine Drehung um $\phi = 2\pi$ muss die idente WF liefern.

aber $e^{i \overset{7/2}{5/2} \cdot 2\pi} = \underbrace{e^{\overset{6}{4} i\pi}}_{1} \underbrace{e^{i\pi}}_{-1} \neq 1$

b) EF ohne Spin-Bahn Kopplung:

$R_{n\ell}(r)\, Y_{\ell m}(\theta, \phi) |\chi\rangle$ hier $R_{21}(r)\, Y_{1m}(\theta, \phi) |\overset{\delta}{\chi}\rangle$ Spin $\uparrow$ oder $\downarrow$

$H_{SB} = \xi \vec{L}\vec{S} = \frac{1}{2}\xi\left[J^2 - L^2 - S^2\right] \quad \| \vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \Rightarrow J^2 = L^2 + S^2 + 2\vec{L}\vec{S}$

Dieser Term ist in $|\ell j m\, s=\frac{1}{2}\rangle$ statt in $|\ell m\, s\, s_z\rangle$ diag.

$\Rightarrow$ EF $|\ell j m\, s=\frac{1}{2}\rangle$

EW: $(H_0 + H_{SB})\, |\ell j m\, s=\frac{1}{2}\rangle$

$$= \underbrace{\left[-Ry \frac{Z^2 \overset{3\ 92}{6}}{\underset{2}{n^2}} + \frac{1}{2}\xi\hbar^2\left(j(j+1) - \underbrace{1(1+1) - \frac{1}{2}\frac{3}{2}}_{-2\frac{3}{4}}\right)\right]}_{\text{Eigenenergien}} |\ell j m\, s=\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$EW = \underbrace{-Ry}_{-13{,}6\,eV} \cdot \frac{9}{4} \quad \frac{92^2}{4} = 46^2 \quad + \frac{1}{2}\xi\hbar^2\left[j(j+1) - 2\frac{3}{4}\right]$$

j: $3/2$ oder $1/2$ d.h. $\frac{15}{4}$ oder $\frac{3}{4}$

d.h. $-\xi\hbar^2$ für $j = 1/2$

$+\xi\hbar^2/2$ für $j = 3/2$

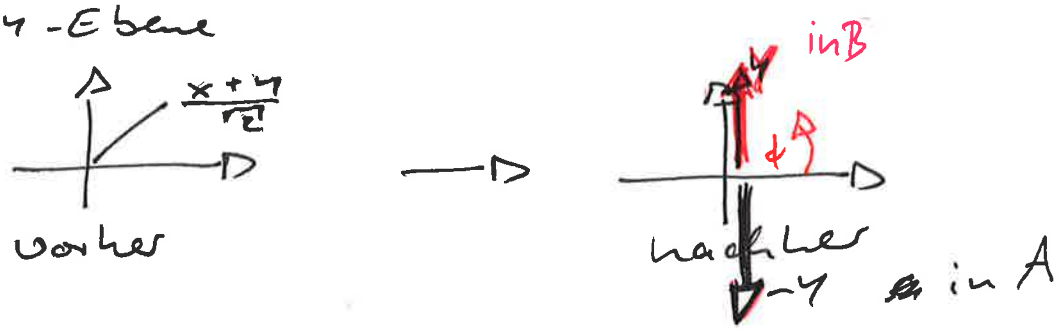
c) d) $\langle p_x\rangle = \int d^3r\, \frac{\hbar}{i}\, \psi^*(\vec{r})\, \frac{d}{dx}\, e^{-i\bar{p}(x+y)/\sqrt{2}\hbar}$

$$= \frac{\hbar}{i}\left(-\frac{i\bar{p}}{\sqrt{2}\hbar}\right) \underbrace{\int d^3r\, \psi^*(\vec{r})\, e^{-i\bar{p}(x+y)/\sqrt{2}\hbar}}_{=1 \text{ normierte WF}}$$

$$= -\frac{\bar{p}}{\sqrt{2}}$$

$$\langle p^2\rangle = \langle p_x^2 + p_y^2 + \underbrace{p_z^2}_{\langle p_z^2\rangle = 0}\rangle = \left(-\frac{\bar{p}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{-\bar{p}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \bar{p}$$

Die unitäre Trafo ist eine Drehung um $\phi = \pm\frac{\pi}{4}$ in der x-y-Ebene



$$\Rightarrow \quad \psi'(\vec{r}) = U\psi(\vec{r}) = e^{-i\frac{\bar{p}}{\hbar}\cdot \pm y}$$

$$\langle p^2\rangle = \bar{p}^2 ; \quad \langle p_x\rangle = 0$$

Wir müssen die Operatoren auch drehen, um das gleiche Ergebnis zu erhalten.

$$p^2 \rightarrow p'^2 = p^2$$ (Gesamtdrehimp. ist drehinvariant)

$$p_x \rightarrow p_x' = \frac{p_x \pm p_y}{\sqrt{2}}$$

d)

$$\cancel{i\hbar}\frac{d}{dt}x_H(t) = [x_H, H] \underset{[x_H,x_H]=0}{=} \left[x_H, \frac{p_H^2}{2m}\right] = \cancel{i\hbar}\frac{p_H(t)}{m}$$

$$\cancel{i\hbar}\frac{d}{dt}p_H(t) = [p_H, H] = \left[p_H, \tfrac{1}{2}m\omega_0^2 x_H^2\right] + [p_H, -\alpha x_H]$$

$$= -\cancel{i\hbar}\, m\omega_0^2 x_H + (-\cancel{i\hbar})(-)\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dt^2}x_H(t) = \frac{-m\omega_0^2 x_H(t) \mp \alpha}{m}$$

$$i\hbar\frac{d}{dt}a_H(t) = [a_H, H] = \left[a_H, \hbar\omega_0\left(a_H^\dagger a_H + \tfrac{1}{2}\right) \pm \alpha\frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(a_H + a_H^\dagger\right)\right]$$

$$= \hbar\omega_0 \underbrace{[a_H, a_H^\dagger]}_{1} a_H \pm \alpha\frac{x_0}{\sqrt{2}} \underbrace{[a_H, a_H^\dagger]}_{1}$$

alle anderen Terme verschwinden

$$\frac{d}{dt}a_H(t) = -\omega_0 a_H(t) \pm \alpha\frac{x_0}{\sqrt{2}}\frac{1}{i\hbar}$$

a_H und x_H sind keine Erhaltungsgrößen, kommutieren nicht mit H

Musterlösung Aufgabe A2/B2

$$\Psi_\lambda(\bar{r}) = N \exp(-\lambda|\bar{r}|) \qquad (\text{in B2} \quad N = 1)$$

$$E_0 \leq \min_\lambda \frac{\langle\Psi_\lambda|H|\Psi_\lambda\rangle}{\langle\Psi_\lambda|\Psi_\lambda\rangle} \qquad \text{mit} \qquad H = \frac{\bar{p}^2}{2m} + V(\bar{r})$$

3D HO : $V(\bar{r}) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$

$$\frac{\bar{p}^2}{2m} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{für } l=0}}{=} -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$$

① $\langle\Psi_\lambda|\Psi_\lambda\rangle = \int d^3r\, |N|^2 e^{-2\lambda r} = 4\pi|N|^2 \int_0^\infty dr\, r^2 e^{-2\lambda r} =$

$$= \frac{4\pi}{(2\lambda)^3}|N|^2 \underbrace{\int_0^\infty t^2 e^{-t}\, dt}_{\Gamma(2+1) = 2!} = \frac{8\pi|N|^2}{(2\lambda)^3} = \frac{\pi|N|^2}{\lambda^3}$$

② $\langle\Psi_\lambda|\frac{\bar{p}^2}{2m}|\Psi_\lambda\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}4\pi|N|^2 \int_0^\infty e^{-\lambda r} \underbrace{\frac{\partial}{\partial r}\underbrace{\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}e^{-\lambda r}\right]}_{-\lambda r^2 e^{-\lambda r}}}_{[-2\lambda r + \lambda^2 r^2]e^{-\lambda r}} dr =$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}4\pi|N|^2 \int_0^\infty dr \left[-2\lambda r + \lambda^2 r^2\right] e^{-2\lambda r} = (**)$$

$$\int_0^\infty dr\,(-2\lambda r)\,e^{-2\lambda r} = -\frac{1}{2\lambda}\underbrace{\int_0^\infty t\,e^{-t}\,dt}_{\Gamma(1+1)=1!} = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$\int_0^\infty dr\,\lambda^2 r^2 e^{-2\lambda r} = \frac{1}{8\lambda}\underbrace{\int_0^\infty t^2 e^{-t}\,dt}_{2!} = \frac{1}{4\lambda}$$

Dann für (**) haben wir:

$$\langle\Psi_\lambda|\frac{\vec{p}^2}{2m}|\Psi_\lambda\rangle = -\frac{\hbar^2}{2m}4\pi|N|^2\left(-\frac{1}{2\lambda}+\frac{1}{4\lambda}\right) = +\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi|N|^2}{\lambda}$$

③ $\langle\Psi_\lambda|\frac{1}{2}m\omega^2 r^2|\Psi_\lambda\rangle = \frac{1}{2}m\omega^2\,4\pi\,|N|^2\int_0^\infty dr\; r^4 e^{-2\lambda r} =$

$$= \frac{m\omega^2|N|^2\cdot4\pi}{2(2\lambda)^5}\underbrace{\int_0^\infty dt\; t^4 e^{-t}}_{4!} = \frac{m\omega^2}{2}\frac{|N|^2\cdot4\pi}{(2\lambda)^5}\cdot4! =$$

$$= \frac{m\omega^2}{2}\frac{3\pi|N|^2}{\lambda^5}$$

Zusammen ① - ③:

$$E_\lambda = \frac{\langle\Psi_\lambda|H|\Psi_\lambda\rangle}{\langle\Psi_\lambda|\Psi_\lambda\rangle} = \frac{\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi|N|^2}{\lambda} + \frac{m\omega^2}{2}\frac{3\pi|N|^2}{\lambda^5}}{\frac{\pi|N|^2}{\lambda^3}} =$$

$$= \frac{\hbar^2\lambda^2}{2m} + \frac{3m\omega^2}{2\lambda^2}$$

Schritt ④ : $\frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} = \frac{2\hbar^2\lambda}{2m} - \frac{6m\omega^2}{2\lambda^3} = 0$

$$\lambda\left[\underbrace{\hbar^2 - \frac{3m^2\omega^2}{\lambda^4}}_{\lambda^2 = \frac{\sqrt{3}\,m\omega}{\hbar}}\right] = 0$$

$\lambda = 0$ ist kein Minimum.

$$E_{\lambda=\lambda_{min}} = \frac{\hbar^2}{2m}\,\frac{\sqrt{3}\,m\omega}{\hbar} + \frac{3\hbar m\omega^2}{2\sqrt{3}\,m\omega} = \hbar\omega\sqrt{3}$$

Schritt ⑤

Exakte Lösung : $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega$

$$\underbrace{E_{\lambda_{min}} = \hbar\omega\sqrt{3} > \frac{3}{2}\hbar\omega}$$

OK

Muster Lösung Aufgabe A4 / B3

$$H = \frac{L^2}{2I} + \alpha\,|m=0\rangle\langle m=0| + \alpha\,|m=1\rangle\langle m=-1| + \alpha\,|m=-1\rangle\langle m=1|$$

$$L^2\,|m\rangle \underset{\uparrow}{=} \hbar^2 l(l+1)\,|m\rangle \overset{}{\underset{\uparrow}{=}} 2\hbar^2\,|m\rangle$$

wir sind hier nur im Unterraum mit $l=1$

a) In der Basis $\{|m\rangle\}$:

$$H = \left(\begin{array}{ccc} m=-1 & m=0 & m=1 \\ \frac{\hbar^2}{I} & 0 & \alpha \\ 0 & \frac{\hbar^2}{I}+\alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \frac{\hbar^2}{I} \end{array}\right)$$

für B3: $\alpha \to \gamma$

Eigenenergien : $E_1 = \frac{\hbar^2}{I} + \alpha$ für $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = |m=0\rangle = |p_z\rangle$

$E_{2,3}$ aus: $\left(\frac{\hbar^2}{I} - \lambda\right)^2 - \alpha^2 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\hbar^2}{I} \pm \alpha$$

$E_2 = \frac{\hbar^2}{I} + \alpha$ für $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m=1\rangle + |m=-1\rangle\right) = |p_y\rangle$

$E_3 = \frac{\hbar^2}{I} - \alpha$ für $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|m=-1\rangle - |m=1\rangle\right) = |p_x\rangle$

b) grün für B3

$$|\Psi(t=0)\rangle = \overset{|m=1\rangle}{|m=-1\rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|p_y\rangle \pm |p_x\rangle\right)$$

$$|\Psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\left(\frac{\hbar}{I}+\frac{\alpha}{\hbar}\right)t} |p_y\rangle \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\left(\frac{\hbar}{I}-\frac{\alpha}{\hbar}\right)t} |p_x\rangle =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-i\left(\frac{\hbar}{I}+\frac{\alpha}{\hbar}\right)t} \left(|m=1\rangle + |m=-1\rangle\right) \pm \frac{1}{2} e^{-i\left(\frac{\hbar}{I}-\frac{\alpha}{\hbar}\right)t} \cdot$$

$$\cdot \left(|m=-1\rangle - |m=+1\rangle\right) = e^{-i\frac{\hbar}{I}t}\left(\cos\left(\frac{\alpha}{\hbar}t\right)|m=-1\rangle + \right.$$

$$-i \sin\frac{\gamma}{\hbar}t$$

$$\left. -i\sin\left(\frac{\alpha}{\hbar}t\right)|m=1\rangle\right)$$

$$+\cos\frac{\gamma}{\hbar}t$$

c) Messwerte: $0,\ \hbar,\ -\hbar$

Warsch.: $P_0 = 0$; $P_\hbar = \sin^2\frac{\alpha}{\hbar}t$; $P_{-\hbar} = \cos^2\frac{\alpha}{\hbar}t$

$P_0 = 0$ $P_\hbar = \cos^2\frac{\gamma}{\hbar}t$ $P_{-\hbar} = \sin^2\frac{\gamma}{\hbar}t$

d)

$$\left.\begin{aligned} \langle\theta,\varphi|m=0\rangle &= Y_{10} \\ \langle\theta,\varphi|m=1\rangle &= Y_{11} \\ \langle\theta,\varphi|m=-1\rangle &= Y_{1-1} \end{aligned}\right\} l=1$$

Die Eigenzustände:

$\langle\theta,\varphi|p_z\rangle = \langle\theta,\varphi|m=0\rangle = Y_{10} \sim \frac{z}{r}$ → Orbital p_z (cubic harmonics)

$\langle\theta,\varphi|p_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle\theta,\varphi|m=1\rangle + \langle\theta,\varphi|m=-1\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_{1-1} + Y_{11}\right) \sim \frac{y}{r}$ (Orbital p_y)

$\langle\theta,\varphi|p_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\langle\theta,\varphi|m=-1\rangle - \langle\theta,\varphi|m=1\rangle\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(Y_{1-1} - Y_{11}\right) \sim \frac{x}{r}$ Orbital p_x

e) Wir suchen nach einem Operator A (hermitesch!) der im dem Unterraum $l = 1$:

(i) mit H kommutiert : $[H, A] = 0$

(ii) in dem Unterraum $\{|p_z\rangle, |p_y\rangle\}$ wo die Energieeigenwerte entartet sind hat nicht entartete Eigenwerte

Mit (i) und (ii) bilden A und H ein vSkO.

Beispiele: $A = L_z^2$; $A = L_x$ aber auch

$$\rightarrow \quad A = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in } L_z\text{-Basis}}}{|m=0\rangle\langle m=0|} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{in Eigenbasis von } H}}{|p_z\rangle\langle p_z|}$$

$[H, A] = 0$ (i)

$$\left.\begin{aligned} A|p_z\rangle &= |p_z\rangle && \rightarrow \text{Eigenwert } 1 \\ A|p_y\rangle &= 0 && \rightarrow \text{Eigenwert } 0 \end{aligned}\right\} \text{(ii)}$$

$$\rightarrow \quad A = |p_z\rangle\langle p_y| + |p_y\rangle\langle p_z|$$

$[H, A] = 0$ (i)

Eigenvektors zu A sind in Unterraum $\{|p_z\rangle, |p_y\rangle\}$:

$$|a_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|p_z\rangle + |p_y\rangle\right) \; ; \; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|p_z\rangle - |p_y\rangle\right) = |a_2\rangle$$

$$A|a_1\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenwert } 1}}{|a_1\rangle} \qquad A|a_2\rangle = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Eigenwert } -1}}{-\,|a_2\rangle} \qquad \text{(ii)}$$

Muster Lösung $\boxed{A\ 3}$ Drei-Niveau-System

$\boxed{B\ 4}$ Spin-1 Teilchen im Magnetfel

$$H = -\frac{\gamma}{\alpha} S_z^2 + \lambda \mu_B B S_x$$

a) Eigenwerte für $\lambda = 0$

$$H = H_0 = -\frac{\gamma}{\alpha} S_z^2 \qquad S_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \boxed{\begin{array}{lll} E_1^0 = -\frac{\gamma}{\alpha}\hbar^2 \equiv \varepsilon & |\psi_1^0\rangle = |1\rangle & \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \\ E_2^0 = 0 & |\psi_2^0\rangle = |0\rangle & \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \\ E_3^0 = -\frac{\gamma}{\alpha}\hbar^2 \equiv \varepsilon & |\psi_3^0\rangle = |-1\rangle & \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \end{array}}$$

b) exakte EW & EF

$$H = \begin{pmatrix} \overset{\varepsilon}{-\frac{\gamma}{\alpha}\hbar^2} & \overset{\equiv \eta}{\frac{\mu_B B \hbar \lambda}{\sqrt{2}}} & 0 \\ \eta & 0 & \eta \\ 0 & \eta & \varepsilon \end{pmatrix} \qquad S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \det(H - w\mathbb{1}) = (\varepsilon - w)\left[(-w)(\varepsilon - w) - \eta^2\right] - \eta^2(\varepsilon - w) = 0$$

$$\rightarrow \boxed{w_1 = \varepsilon = -\frac{\gamma}{\alpha}\hbar^2} \quad \wedge \quad w^2 - w\varepsilon - 2\eta^2 = 0$$

$$\boxed{w_{2/3} = \frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 + 8\eta^2} = -\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\hbar^2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\hbar^4\frac{\gamma^2}{\alpha^2} + 4\hbar^2\mu_B^2 B^2 \lambda^2}}$$

Eigenvektoren

- $w_1 = \varepsilon \quad \rightarrow \quad \overset{(H-\varepsilon\mathbb{1})}{\cancel{4}}\,\underline{v}_1 = 0 \qquad (H-\varepsilon\mathbb{1})\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 \\ \eta & -\varepsilon & \eta \\ 0 & \eta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = 0$

$$\boxed{\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad |1\rangle - |-1\rangle}$$

- $w_{\substack{2\\3}} = \frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{1}{2}\overbrace{\sqrt{\varepsilon^2+8\eta^2}}^{\nu} \qquad (H - w_{\substack{2\\3}}\mathbb{1}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\varepsilon \mp \nu) & \eta & 0 \\ \eta & \frac{1}{2}(-\varepsilon \mp \nu) & \eta \\ 0 & \eta & \frac{1}{2}(\varepsilon \mp \nu) \end{pmatrix}$

$\underline{v}_{\substack{2\\3}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$\rightarrow \quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}(\varepsilon \mp \nu)a + \eta b && = 0 \\ &\eta a + \tfrac{1}{2}(-\varepsilon \mp \nu)b + \eta c && = 0 \\ &\eta b + \tfrac{1}{2}(\varepsilon \mp \nu)c && = 0 \end{aligned}$$

$$a \equiv 1 \quad \rightarrow \quad b = -\frac{\varepsilon \mp \nu}{2\eta} \quad \rightarrow \quad c = 1$$

$$\boxed{\underline{v}_{2/3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{\varepsilon \mp \nu}{2\eta} \\ 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} |1\rangle \\ |0\rangle \\ |-1\rangle \end{matrix} \longrightarrow \; + \; \frac{+\overset{\gamma}{\alpha}\hbar^2 \cancel{\mp} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\hbar\,\cancel{\vartheta}^{2}\alpha^2 + 4\hbar^2\mu_B^2 B_z^2}}{\sqrt{2}\,\mu_B B \hbar}}$$

c) $E_2^0 = 0$ ist nicht entartet

$$E_2 = E_2^0 + \lambda \underbrace{\boxed{E_2^{(1)}}} + \dots$$

$$\boxed{\langle 0|\mu_B B S_x|0\rangle = 0}$$

$$\boxed{|\psi_2\rangle} = |\psi_2^0\rangle + \lambda|\psi_2^1\rangle + \dots$$

$$= |0\rangle + \lambda \sum_{m\neq 2} |\psi_m^0\rangle \frac{\langle\psi_m^0|\mu_B B S_x|\overbrace{\psi_2^0\rangle}^{|0\rangle}}{\underbrace{E_2^0}_{0} - \underbrace{E_m^0}_{-\underset{\alpha}{\gamma}\hbar^2}}$$

$$= |0\rangle + \frac{\lambda\mu_B B}{\underset{\alpha}{\gamma}\hbar^2}\Big[\,|1\rangle\overbrace{\langle 1|S_x|0\rangle}^{\hbar/\sqrt{2}} + |-1\rangle\underbrace{\langle -1|S_x|0\rangle}_{\hbar/\sqrt{2}}\,\Big]$$

$$\boxed{= |0\rangle + \frac{\lambda\mu_B B}{\sqrt{2}\,\underset{\alpha}{\gamma}\hbar}\big(|1\rangle + |-1\rangle\big)}$$

d) Korrektur von E_2 in λ^2

$$\boxed{\lambda^2 E_2^2} = \lambda^2 \sum_{m=1,3} \frac{|\overbrace{\langle \psi_m^0 | \mu_B B S_x | \psi_2^0 \rangle}^{\mu_B B \hbar/\sqrt{2}}|^2}{\frac{\gamma}{\alpha}\hbar^2}$$

$$= \boxed{\lambda^2 \frac{\mu_B^2 B^2}{\frac{\gamma}{\alpha}}} \qquad = -\frac{2\eta^2}{\varepsilon}$$

e) Exakte Eigenwerte nach Potenzen in λ

$$\boxed{w_1 = -\frac{\gamma}{\alpha}\hbar^2} \qquad \eta = \frac{\mu_B B \hbar}{\sqrt{2}} \cdot \lambda$$

$$\boxed{w_{2/3}} = \frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\varepsilon^2 + 8\eta^2} \qquad \sqrt{1+x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} \pm \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{1 + \frac{8\eta^2}{\varepsilon^2}}$$

$$\approx \frac{\varepsilon}{2} \pm \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\eta^2}{\varepsilon}\right)$$

$$\approx \begin{cases} \varepsilon + 2\eta^2/\varepsilon & = -\frac{\gamma}{\alpha}\hbar^2 - \frac{\mu_B^2 B^2}{\frac{\gamma}{\alpha}}\lambda^2 \\ -2\eta^2/\varepsilon & = +\frac{\mu_B^2 B^2}{\frac{\gamma}{\alpha}}\lambda^2 \end{cases}$$

$\rightarrow$ $\overset{E_2}{\cancel{\omega_3}} = \omega_3 + \mathcal{O}(\lambda^3)$ ✓ (nicht entartet)

f) Bis 2^{te} Ordnung in λ für E_1^0, E_3^0

- 1. Ordnung : Im Unterraum $\overset{\text{span}}{\{|1\rangle, |-1\rangle\}}$ verschwindet die Störung S_x

$$\rightsquigarrow \quad E^1_{1,3} = 0$$

- 2. Ordnung : Damit ist S_x bereits diagonal in selbigem Unterraum

$$\rightsquigarrow \boxed{\lambda^2 E_1^{(2)}} = \lambda^2 \sum_{\substack{m \\ \hookrightarrow m=2}}^{E_m^0 \neq E_1^0} \frac{|\langle \psi_2^0 | \mu_B B S_x | \psi_1^0 \rangle|^2}{\underbrace{E_1^0}_{-\underset{\alpha}{\gamma}\hbar^2} - \underbrace{E_2^0}_{0}}$$

$$\boxed{= -\frac{\lambda^2 \mu_B^2 B^2}{2 \underset{\alpha}{\gamma}} = \lambda^2 E_3^{(2)}} = \frac{\eta^2}{\varepsilon}$$

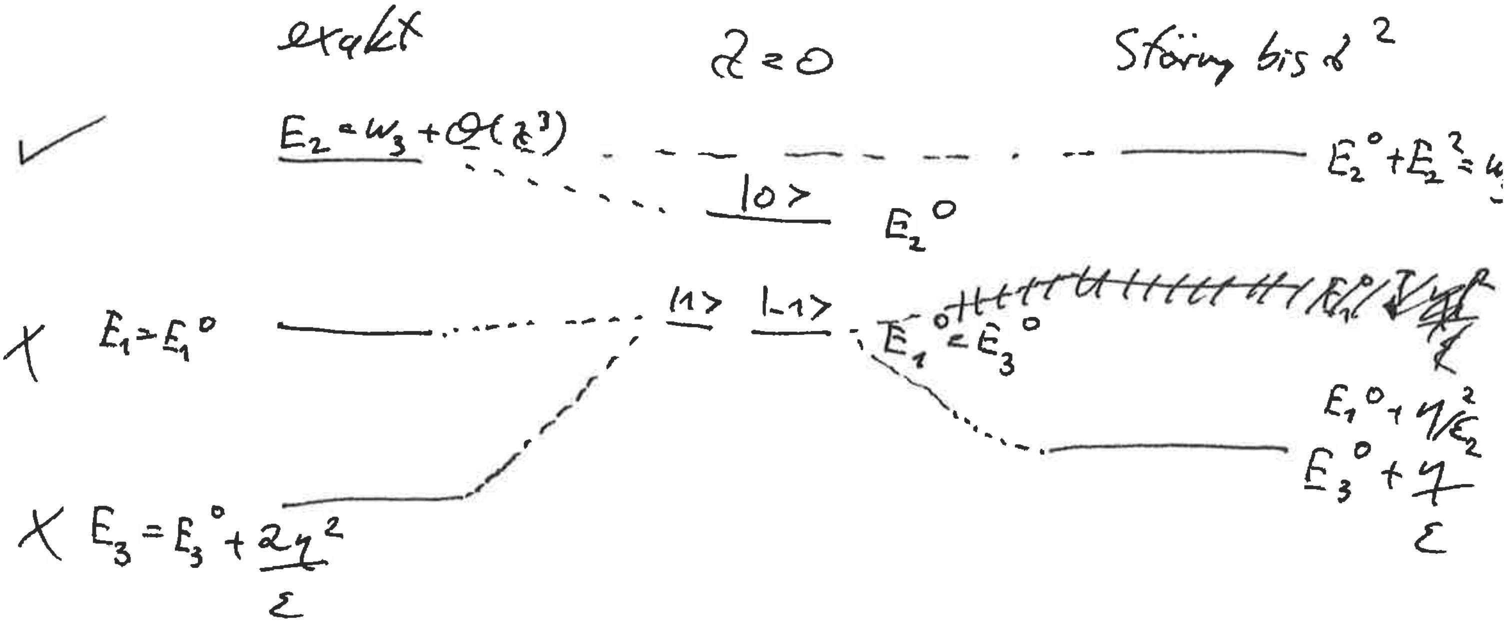
Bis 1^{te} Ordnung in λ für $|\psi_{1_3}\rangle$

muß $\langle 0|$ sein!

$$\boxed{|\psi_1\rangle} = |\psi_1^0\rangle + \lambda \sum_{m \neq 1} |\psi_m^0\rangle \frac{\overset{\downarrow}{\langle \psi_m^0|}\!\!{}^{= \langle \psi_2^0|} \mu_B B S_x \overset{|1\rangle}{\overbrace{|\psi_1^0\rangle}}}{\underbrace{E_1^0}_{-\underset{\alpha}{\gamma}\hbar^2} - \underbrace{E_m^0}_{0}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &= |1\rangle \mp \lambda\, |0\rangle \frac{\mu_B B}{\sqrt{2}\, \underset{\alpha}{\cancel{\gamma}}\, \hbar} \\ &= |\psi_3\rangle \end{aligned}}$$

g) Die Energiekorrekturen der Störungstheorie 2ter Ordnung stimmen nicht mit der Entwicklung der exakten Eigenwerte überein



In den ~~Die~~ exakten Eigenvektoren, die zu $E_{1,3}$ gehören, mischen die Zustände $|1\rangle$, $|-1\rangle$, während die Korrektur des Zustands $|\psi_1\rangle$ $[|\psi_3\rangle]$ in 1. Ordnung Störungsrechnung keinen Anteil $|-1\rangle$ $[|1\rangle]$ generiert.

Die Störungstheoretische Korrektur ist basisabhängig. Man müßte die Korrektur in einer Basis berechnen, in welcher die Störung im entarteten Unterraum nicht verschwindet.