Musterlösung zu Aufgabe 12

$$H = -\frac{\hbar^2 \partial_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}$$

ad. a)

$$\langle k' | x | k \rangle = ?$$

Das ist ein Matrixelement des Operators x im Impulsraum. Wir kennen den Matrixelement von x in Ortsraum:

$$\langle x' | x | x \rangle = x\,\delta(x - x')$$

Durch Einsetzen von $\mathbb{1} = \int dx\, |x\rangle\langle x|$ wir können es hier benutzen:

$$\langle k' | \underset{\mathbb{1}}{\overset{\uparrow}{}} x \underset{\mathbb{1}}{\overset{\uparrow}{}} | k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \underbrace{\langle k' | x' \rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik'x'}} \underbrace{\langle x' | x | x \rangle}_{x\,\delta(x-x')} \underbrace{\langle x | k \rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dx \int dx'\, e^{-ik'x'}\, x\,\delta(x - x')\, e^{ikx} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int dx\; x\, e^{-ik'x}\, e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k} \underbrace{\int dx\, e^{i(k-k')x}}_{2\pi\,\delta(k-k')} =$$

$$\left\{ x e^{ikx} = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k} e^{ikx} \right\}$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial k} \delta(k - k') \underset{(*)}{=} -\frac{1}{i} \delta(k - k') \frac{\partial}{\partial k'}$$

Beweis für (*) mit Probefunktion $\varphi(k')$: ②

$$\int dk' \frac{\partial}{\partial k} \delta(k-k')\varphi(k') = \int dk' \underbrace{\delta'(k-k')}_{v'} \underbrace{\varphi(k')}_{u} = uv\Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int v u' =$$

$$= \underbrace{\delta(k-k')\varphi(k')\Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int dk' \, \delta(k-k')\varphi'(k') = -\int dk' \, \delta(k-k') \frac{\partial}{\partial k'} \varphi(k')$$

ad a)

$$\langle k' | x^2 | k \rangle = \left[i\delta(k-k') \frac{\partial}{\partial k'} \right]^2 = -\delta(k-k') \frac{\partial^2}{\partial k'^2}$$

$$\langle k' | \underbrace{p | k \rangle}_{\hbar k | k\rangle} = \hbar k \langle k' | k \rangle = \hbar k \, \delta(k-k')$$

↑ Eigenstate des Impulsoperators

$$\langle k' | p^2 | k \rangle = \hbar^2 k^2 \langle k' | k \rangle = \hbar^2 k^2 \delta(k-k')$$

$$\langle k' | H | k \rangle = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \delta(k-k') - \frac{m\omega^2}{2} \delta(k-k') \frac{\partial^2}{\partial k^2}$$

Schrödingergl.: $i\hbar \partial_t |\Psi\rangle = H |\Psi\rangle$

$$i\hbar \partial_t \langle k | \Psi \rangle = \langle k | \underset{\uparrow \, \mathbb{1}}{|} H | \Psi \rangle = \int dk' \langle k | H | k' \rangle \langle k' | \Psi \rangle =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{m\omega^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial k^2} \right]}_{H \text{ in Impulsdarstellung}} \langle k | \Psi \rangle$$

mit $p = \hbar k$

und $\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial p} = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial k}$: $H(p) = \underbrace{\frac{p^2}{2m} - \frac{\hbar^2 m\omega^2}{2}\left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^2}_{}$

ist gleich mit H im Ortsraum mit $x \leftrightarrow p$ und $m \to M = \frac{1}{m\omega}$

ad. b)

Die Energien sind gleich (als die sein müssen) weil ω bleibt unverändert

Die Eigenfunktionen sind jetzt

$$\langle k | \Psi_n \rangle = \Psi_n\left(p/p_0\right) \sim H_n\left(\frac{p}{p_0}\right) e^{-\left(\frac{p}{p_0}\right)^2}$$ mit $p_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{M\omega}} = \sqrt{\hbar m \omega}$

(in Impulsdarstellung ; $p = \hbar k$)