Aufgabe 5

Wir suchen eine Lösung der Schrödinger-Gl.

$$(1) \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) + V(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$

für $V(x) > 0$ und $V(x) \to 0 \quad |x| \to \infty$.

In asymptotischen Bereich, $|x| \to \infty$, wir haben $V \to 0$ und die Lösung ist für freie Schrödinger-Gl:

$$(2) \quad -\frac{\hbar^2}{2m}\Psi''(x) = E\Psi(x)$$

Lösungen von (2) sind von 2 Typen:

a) $\Psi(x) \sim e^{\pm ikx}$; $k > 0$

dann $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0$

(Streuzustände) – Ebene Wellen

b) $\Psi(x) \sim e^{\pm \varkappa x}$; $\varkappa > 0$

mit $E = \frac{-\hbar^2 \varkappa^2}{2m} < 0$

Für Normierbarkeit, also nur zu erfüllen:

$$\int_{-\infty}^{-a} |\Psi(x)|^2 dx \xrightarrow[a\to\infty]{} 0 \quad \text{und} \quad \int_{a}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx \xrightarrow[a\to\infty]{} 0$$

wir brauchen asymptotisch:

$$\Psi(x) \sim e^{\varkappa x} \quad \text{für } x \to -\infty$$

und $\Psi(x) \sim e^{-\varkappa x}$ für $x \to \infty$

Nehmen wir an, dass für $x \to -\infty$:

$$\Psi(x) = Ae^{\eta x} \quad \text{mit } A > 0$$

(die Wellenfunktion $\Psi(x)$ ist bis zu einer globale Phase bestimmt, also wir können diese Phase so wählen, dass $\Psi(x)$ für $x \to -\infty$ reel ist)

Dann $\mathrm{Re}[\Psi(x)] = Ae^{\eta x}$ wächst mit x.

Um Normierbarkeit zu erhalten muss aber $\mathrm{Re}\,\Psi(x)$ irgendwann ein Maximum haben, also: $\mathrm{Re}\,\Psi''(x) < 0$

aber

$$\mathrm{Re}\,\Psi''(x) = \underbrace{\frac{2m\,(V-E)}{\hbar^2}}_{>0}\;\underbrace{\mathrm{Re}\,\Psi(x)}_{>0}$$

(weil $V > 0$ und $E < 0$)

d.h. $\mathrm{Re}\,\Psi''(x) > 0$

Wir kommen zu einem Widerspruch.

Es ist nicht möglich so eine $\Psi(x)$ zu finden