Aufgabe 6

$$V(x) = \alpha\,\delta\!\left(\frac{2m}{\hbar^2}(x+a)\right) + \alpha\,\delta\!\left(\frac{2m}{\hbar^2}(x-a)\right)$$

a) Anschlussbedingungen:

① Stetigkeit der Wellenfunktion

② Stetigkeit der erste Ableitung (?)

Wir gehen den Hinweis nach und Integrieren

$$\int_{-a-\varepsilon}^{-a+\varepsilon}\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Psi(x) + V(x)\Psi(x)\right]dx = E\int_{-a-\varepsilon}^{-a+\varepsilon}\Psi(x)\,dx \;\xrightarrow{\text{fall ① dann ebens Integral verschwindet für } \varepsilon\to 0}\; 0$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\Psi'(x)\Big|_{-a+\varepsilon} - \Psi'(x)\Big|_{-a-\varepsilon}\right] + \frac{\hbar}{2m}\alpha\,\Psi(-a) = 0$$

$$\downarrow\ \varepsilon \to 0$$

$$\Psi_R'(-a) - \Psi_L'(-a) = \alpha\,\Psi(-a) \qquad (2a)$$

Die Ableitung hat ein Sprung. Bedingung ② Läßt sich nicht erfüllen. Stattdessen haben wir (2a)

b) Ansatz für die Wellenfunktion

$\psi_I = e^{ikx} + r e^{-ikx}$; $\psi_{II} = A e^{ikx} + B e^{-ikx}$; $\psi_{III} = t e^{ikx}$

Anschlussbedingungen:

$$\text{(a)}\ \psi_I(-a) = \psi_{II}(-a) \qquad \text{(c)}\ \psi'_{II}(-a) - \psi'_I(-a) = \alpha\,\psi_{II}(a)$$

$$\text{(b)}\ \psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \qquad \text{(d)}\ \psi'_{III}(a) - \psi'_{II}(a) = \alpha\,\psi_{III}(a)$$

Wir lösen (a-d) in Suche für r, t, A, B

in $x = a$

$$\text{(b)}\ \begin{cases} A e^{ika} + B e^{-ika} = t e^{ika} \\ ik t e^{ika} - ik A e^{ika} + ik B e^{-ika} = \alpha t e^{ika} \quad / : ik \end{cases} \ \text{(d)}$$

$$\ominus \begin{cases} A e^{ika} - t e^{ika} = -B e^{-ika} \\ A e^{ika} - t e^{-ka} = B e^{-ika} \underbrace{- \frac{\alpha}{ik}}_{+\frac{i\alpha}{k}} t e^{ika} \end{cases}$$

$$2B e^{-ika} = -\frac{i\alpha}{k} t e^{ika} \qquad \boxed{\beta = \frac{\alpha}{2k}}$$

$$(*)\ B = -\frac{i\alpha}{2k} t e^{2ika} = -i\beta t e^{2ika}$$

$$A e^{ika} = t e^{ika} + \frac{i\alpha}{2k} t e^{ika}$$

$$(**)\ A = t\left(1 + \frac{i\alpha}{2k}\right) = t(1 + i\beta)$$

$\boxed{x=-a}$

$$\begin{cases} ⓐ\; e^{-ika} + r e^{ika} = A e^{-ika} + B e^{ika} \\ ⓒ\; ikAe^{-ika} - Bike^{ika} - ike^{-ika} + rike^{ika} = \alpha A e^{-ika} + \alpha B e^{ika} \end{cases}$$

ⓒ: $e^{-ika} - r e^{ika} = A e^{-ika} - B e^{ika} - \frac{\alpha}{ik} A e^{-ika} - \frac{\alpha}{ik} B e^{ika}$

ⓐ+ⓒ : $2 e^{-ika} = 2 A e^{-ika} + i 2\beta A e^{-ika} + i 2\beta B e^{ika}$

$$1 = A(1+i\beta) + i\beta B e^{2ika}$$

aus (*) und (**) : $1 = t(1+i\beta)^2 + t e^{4ika} \beta^2$

$$\underline{t = \frac{1}{(1+i\beta)^2 + e^{4ika}\beta^2}}$$

ⓐ-ⓒ : $2 r e^{ika} = 2 B e^{ika} + \frac{\alpha}{ik} A e^{-ika} + \frac{\alpha}{ik} B e^{ika}$

$$r = B - i\beta A e^{-2ika} - i\beta B = (1-i\beta) B - i\beta A e^{-2ika}$$

aus (*), (**) $\quad r = t\left[(-\beta^2 - i\beta) e^{2ika} + t(\beta^2 - i\beta) e^{-2ika}\right] =$

$$\underline{= 2i\beta t\left[\beta \sin 2ka + \cos 2ka\right]}$$

c) $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} > 0$, Energie ist positiv und es gibt keine Quantisierung von Energieniveaus. k ist eine kontinuierliche variable und so ist Energie.

d) Transmissionskoeffizient: Reflexionskoeffizient ④

$$T = \frac{j_{\text{transmiert}}}{j_{\text{eingehend}}} \; ; \qquad R = \frac{j_{\text{reflektiert}}}{j_{\text{eingehend}}}$$

$$j(x) = \frac{\hbar}{m}\, \mathrm{Im}\left[\psi^*(x)\,\frac{d\psi(x)}{dx}\right]$$

$$j_{\text{ein}} = \frac{\hbar}{m}\, \mathrm{Im}\left[e^{-ikx}\,\frac{d\,e^{ikx}}{dx}\right] = \frac{\hbar k}{m}$$

$$j_{\text{tran}} = \frac{\hbar}{m}\, \mathrm{Im}\left[t^* e^{-ikx}\,\frac{d\,t\,e^{ikx}}{dx}\right] = \frac{\hbar k}{m}|t|^2$$

$$j_{\text{refl.}} = \frac{\hbar}{m}\, \mathrm{Im}\left[r^* e^{ikx}\,\frac{d\,r\,e^{-ikx}}{dx}\right] = \frac{\hbar k}{m}|r|^2$$

$$T = |t|^2 \; , \; R = |r|^2$$

$$|t|^2 = \left|\frac{1}{(1+i\beta)^2 + e^{4ika}\beta^2}\right|^2 = \frac{1}{1 + 4\beta^2\left[\beta\sin 2ka + \cos 2ka\right]^2}$$

$$\beta^2 = \frac{\alpha^2}{4k^2} = \frac{\alpha^2\hbar^2}{8mE} \sim \frac{1}{E}$$

$$|t|^2 \xrightarrow[E\to\infty]{} 1$$ (Transmissionskoeffizient wächst mit E)

$$|r|^2 = 4|\beta|^2|t|^2\left[\beta\sin 2ka + \cos 2ka\right]^2 =$$

$$= 4\beta^2\,\frac{\left[\beta\sin 2ka + \cos 2ka\right]^2}{1 + 4\beta^2\left[\beta\sin 2ka + \cos 2ka\right]^2}$$

$$\boxed{|r|^2 + |t|^2 = 1}$$

e) für $\alpha < 0$ ist die Lösung für das Streuproblem gleich. T und R sind von Vorzeichen von α nicht abhängig.

Aber das Potenzial $V(x)$ ist nicht mehr positiv und wir bekommen auch mögliche Lösungen für $E < 0$: Gebundene Zustände mit

$$\psi_{\underline{I}} \sim e^{\varkappa x}$$
$$\psi_{\underline{III}} \sim e^{-\varkappa x} \quad , \varkappa > 0$$

Die vollständige Lösung für gebundene Zustände befindet sich in Musterlösung von <u>Test 1</u> aus 2016 (in Tiss zu downloaden)