Aufgabe 7

a) Normierung

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x)\,\psi(x)\,dx = |\alpha|^2 \Big[\frac{4}{25} \underbrace{\int \psi_0^* \psi_0}_{=1} + \frac{4}{25} \underbrace{\int \psi_1^* \psi_1}_{=1} + \frac{1}{25} \underbrace{\int \psi_2^* \psi_2}_{=1} \Big]$$

$$= |\alpha|^2 \frac{9}{25}$$

die Mischterme verschwinden weil Eigenzustände des Harmonischen Oszikators ortogonal sind

$$\int \psi_m^* \psi_n = 0 \quad \text{für } m \neq n \quad ; \quad \boxed{|\alpha| = \frac{5}{3}}$$

b) Zeitentwicklung für Eigenzustände ist bekannt:

$$\psi_n(x,t) = e^{-i E_n/\hbar\, t}\, \psi_n(x)$$

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega$$

Dann:

$$\psi(x,t) = \alpha \Big[\frac{2}{5} e^{-i E_0/\hbar\, t} \psi_0(x) + \frac{2}{5} e^{-i E_1/\hbar\, t} \psi_1(x) - \frac{i}{5} e^{-i E_2/\hbar\, t} \psi_2(x) \Big] =$$

$$= \frac{2}{3} e^{-i \frac{1}{2}\omega t} \psi_0(x) + \frac{2}{3} e^{-i \frac{3}{2}\omega t} \psi_1(x) - \frac{i}{3} e^{-i \frac{5}{2}\omega t} \psi_2(x)$$

c) $\langle x \rangle (t)$, $\langle p \rangle (t)$, $\langle x^2 \rangle (t) = ?$

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\langle x\rangle(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{2}{3} e^{i\frac{1}{2}\omega t} \psi_0^* + \frac{2}{3} e^{i\frac{3}{2}\omega t} \psi_1^* + \frac{i}{3} e^{i\frac{5}{2}\omega t} \psi_2^* \right] x \left[\frac{2}{3} e^{-i\frac{1}{2}\omega t} \psi_0 + \frac{2}{3} e^{-i\frac{3}{2}\omega t} \psi_1 - \frac{i}{3} e^{-i\frac{5}{2}\omega t} \psi_2 \right]$$

symmetrisch

antisymmetrisch

Die Eigenfunktionen von HO sind entweder symmetrisch oder antisymmetrisch.

ψ_0 - symmetrisch

ψ_1 - antisymmetrisch dann $\psi_1^* \psi_1 = |\psi_1|^2$ symmetrisch

ψ_2 - symmetrisch

Die Beiträge die antisymmetrisch sind, verschwinden weil wir über ein symmetrisches Interval integrieren.

Bleibt: $\int \psi_0^* x \psi_1$, $\int \psi_1^* x \psi_0$, $\int \psi_2^* x \psi_1$, $\int \psi_1^* x \psi_2$

$$\langle x\rangle(t) = \frac{4}{9} e^{-i\omega t} \int \psi_0^* x \psi_1 + \frac{4}{9} e^{i\omega t} \int \psi_1^* x \psi_0 + \frac{2i}{9} e^{i\omega t} \int \psi_2^* x \psi_1 - \frac{2i}{9} e^{-i\omega t} \int \psi_1^* x \psi_2$$

wobei:

$$\int \psi_0^* x \psi_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0^*(x)\, x\, \psi_1(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{A_0^* e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} x\, A_1 \cdot 2\frac{x}{x_0} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_0}\right)^2}}_{\text{Normierungen von Eigenzuständen}} dx =$$

$$= A_0^* A_1 \frac{2}{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-\left(\frac{x}{x_0}\right)^2} dx = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$$

$$\int \Psi_1 \, x \, \Psi_0^* \underset{\uparrow}{=} \int \Psi_1^* \, x \, \Psi_0 = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$$

Ψ_n sind reel für HO

$$\int \Psi_2^* x \Psi_1 = \int \Psi_2 \, x \, \Psi_1^* = x_0$$

$$\langle x \rangle (t) = \frac{4}{9} e^{-i\omega t} \frac{x_0}{\sqrt{2}} + \frac{4}{9} e^{i\omega t} \frac{x_0}{\sqrt{2}} + \frac{2i}{9} e^{i\omega t} x_0 - \frac{2i}{9} e^{-i\omega t} x_0 =$$

$$= \frac{4x_0}{9\sqrt{2}} \underbrace{\left(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t}\right)}_{2\cos\omega t} + \frac{2i}{9} x_0 \underbrace{\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)}_{2i\sin\omega t} =$$

$$= \frac{x_0}{9}\left(\frac{8}{\sqrt{2}} \cos\omega t - 4 \sin\omega t\right)$$

Analog für $p = -i\hbar \frac{d}{dx}$: auch nur die symmetrische Kombinationen verschwinden nicht : $\int \Psi_0^* p \Psi_1$; $\int \Psi_1^* p \Psi_0$

$\int \Psi_1^* p \Psi_2$; $\int \Psi_2^* p \Psi_1$

$$\langle p \rangle (t) = \frac{\hbar}{9x_0}\left(-\frac{8}{\sqrt{2}} \sin\omega t - 4 \cos\omega t\right)$$

Für $\langle x^2 \rangle (t)$ brauchen wir andere Matrixelemente zwischen Eigenzuständen, sodass die Integrale nicht verschwinden: $\int \Psi_0^* x^2 \Psi_0$; $\int \Psi_1^* x^2 \Psi_1$; $\int \Psi_2^* x^2 \Psi_2$

$\int \Psi_2^* x^2 \Psi_0$; $\int \Psi_0^* x^2 \Psi_2$

$$\langle x^2 \rangle (t) = \frac{4}{9} \int \Psi_0^* x^2 \Psi_0 + \frac{4}{9} \int \Psi_1^* x^2 \Psi_1 + \frac{1}{9} \int \Psi_2^* x^2 \Psi_2 +$$

$$+ \frac{2i}{9} e^{2i\omega t} \int \Psi_2^* x^2 \Psi_0 - \frac{2i}{9} e^{-2i\omega t} \int \Psi_0^* x^2 \Psi_2$$

$$\langle x^2\rangle(t) = \frac{4}{9}\frac{x_0^2}{2} + \frac{4}{9}\cdot\frac{3x_0^2}{2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{5x_0^2}{2} + \frac{2i}{9}e^{2i\omega t}\frac{x_0^2\sqrt{2}}{2} - \frac{2i}{9}e^{-2i\omega t}\frac{x_0^2\sqrt{2}}{2} =$$

$$= \frac{x_0^2}{2}\left(\frac{21}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{9}\sin 2\omega t\right) = x_0^2\left(\frac{7}{6} - \frac{2\sqrt{2}}{9}\sin 2\omega t\right)$$

Für $\underline{t=0}$ $\langle x\rangle = \langle p\rangle = 0$ aber $\langle x^2\rangle = \frac{7}{6}x_0^2$

Alle Erwartungswerte sind reel!

d) Die Rechnungen mit a und a^+ lassen das Rechnen von $\int x^n e^{-\alpha x^2}$ Integrale vermeiden

<u>Zu Erinnerung:</u>

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(a + a^+)$$

$$p = -i\hbar\frac{1}{x_0\sqrt{2}}(a - a^+)$$

$[a, a^+] = aa^+ - a^+a = 1$ ⇐ Ordnung von Operatoren ist wichtig!

$[a, a] = 0$

$[a^+, a^+] = 0$

$$\left.\begin{aligned} a\,\psi_0 &= 0 \\ a^+\psi_0 &= \psi_1 \\ \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^+)^n\psi_0 &= \psi_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} a\,\psi_n &= \sqrt{n}\,\psi_{n-1} \\ a^+\psi_n &= \sqrt{n+1}\,\psi_{n+1} \end{aligned}$$

Wir möchten rechnen:

$$\langle x\rangle(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^*(x,t)\, \frac{x_0}{\sqrt{2}} \left(a + a^+\right) \Psi(x,t)\, dx$$

$$a\Psi(x,t) = a\left(\frac{2}{3} e^{-i\frac{1}{2}\omega t}\psi_0 + \frac{2}{3} e^{-i\frac{3}{2}\omega t}\psi_1 - \frac{i}{3} e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\psi_2\right) =$$

$$= \frac{2}{3} e^{-i\frac{1}{2}\omega t} \underbrace{a\psi_0}_{\overset{\shortparallel}{0}} + \frac{2}{3} e^{-i\frac{3}{2}\omega t} \underbrace{a\psi_1}_{\psi_0} - \frac{i}{3} e^{-i\frac{5}{2}\omega t} \underbrace{a\psi_2}_{\sqrt{2}\psi_1} =$$

$$= \frac{2}{3} e^{-i\frac{3}{2}\omega t}\psi_0 - \frac{i}{3} e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\sqrt{2}\cdot\psi_1$$

$$a^+\Psi(x,t) = \frac{2}{3} e^{-i\frac{1}{2}\omega t} \underbrace{a^+\psi_0}_{\psi_1} + \frac{2}{3} e^{-i\frac{3}{2}\omega t} \underbrace{a^+\psi_1}_{\sqrt{2}\psi_2} - \frac{i}{3} e^{-i\frac{5}{2}\omega t} \underbrace{a^+\psi_2}_{\sqrt{3}\psi_3}$$

$$\langle x\rangle(t) = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\int \left(\frac{2}{3} e^{i\frac{1}{2}\omega t}\psi_0^* + \frac{2}{3} e^{i\frac{3}{2}\omega t}\psi_1^* - \frac{i}{3} e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\psi_2^*\right)\Big(\underbrace{\frac{2}{3} e^{-i\frac{3}{2}\omega t}\psi_0 - \frac{i}{3} e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\sqrt{2}\psi_1}_{\text{aus } a\Psi}$$

$$\underbrace{+ \frac{2}{3} e^{-i\frac{1}{2}\omega t}\psi_1 + \frac{2}{3} e^{-i\frac{3}{2}\omega t}\sqrt{2}\psi_2 - \frac{i}{3} e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\sqrt{3}\psi_3}_{\text{aus } a^+\Psi}\Big)$$

wir benutzen ortonormalität von ψ_n

$$= \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(\frac{4}{9} e^{-i\omega t} - \frac{2i\sqrt{2}}{9} e^{-i\omega t} + \frac{4}{9} e^{i\omega t} + \frac{2i\sqrt{2}}{9} e^{i\omega t}\right) = \frac{x_0}{9}\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\cos\omega t - 4\sin\omega t\right)$$

Das Ergebnis ist gleich und wir haben keine Integrale rechnen müssen!

Analog für $p = -i\hbar \frac{1}{x_0\sqrt{2}}(a - a^+)$. Was sich ändert ⑥

ist nur das Vorzeichen vor den $a^+\Psi$ Beitrag:

$$\langle p\rangle(t) = -i\hbar \frac{1}{x\sqrt{2}}\left(\frac{4}{9}e^{-i\omega t} - \frac{2i\sqrt{2}}{9}e^{-i\omega t} - \frac{4}{9}e^{i\omega t} - \frac{2i\sqrt{2}}{9}e^{i\omega t}\right) =$$

$$= -\frac{\hbar}{9x_0}\left(\frac{8}{\sqrt{2}}\sin\omega t + 4\cos\omega t\right)$$

Für x^2 haben wir folgende Beiträge:

$$x^2 = \frac{x_0^2}{2}(a+a^+)(a+a^+) = \frac{x_0^2}{2}\left(\underbrace{aa}_{a^2} + a^+a + \underbrace{aa^+}_{aa^+ = a^+a + 1} + \underbrace{(a^+)(a^+)}_{(a^+)^2}\right) =$$

$$= \frac{x_0^2}{2}\left(a^2 + 2a^+a + 1 + (a^+)^2\right)$$

Wie wirkt a^+a auf Ψ_n?

$$\underbrace{a^+a}_{\hat{n}\text{ - Zahloperator}}\Psi_n = a^+\sqrt{n}\,\Psi_{n-1} = \sqrt{n}\sqrt{n-1+1}\,\Psi_n = n\Psi_n$$

$$x^2 = \frac{x_0^2}{2}\left(a^2 + 2\hat{n} + 1 + (a^+)^2\right)$$

$$a^2\Psi(x,t) = a\left(a\Psi(x,t)\right) = \frac{2}{3}e^{-i\frac{3}{2}\omega t}\underbrace{a\Psi_0}_{=0} - \frac{i}{3}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\sqrt{2}\,\underbrace{a\Psi_1}_{=\Psi_0} =$$

$$= -\frac{i}{3}\sqrt{2}\,e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\Psi_0$$

$$a^{+2}\Psi(x,t) = a^+\left(a^+\Psi(x,t)\right) = \frac{2}{3}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}\underbrace{a^+\Psi_1}_{\sqrt{2}\Psi_2} + \frac{2}{3}e^{-i\frac{3}{2}\omega t}\sqrt{2}\,\underbrace{a^+\Psi_2}_{\sqrt{3}\Psi_3} - \frac{i}{3}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\sqrt{3}\,\underbrace{a^+\Psi_3}_{\sqrt{4}\Psi_4}$$

$$(2\hat{n}+1)\psi_n = 2\underbrace{\hat{n}\psi_n}_{n\psi_n} + \psi_n = 2n\psi_n + \psi_n = (2n+1)\psi_n$$

$$(2\hat{n}+1)\psi(x,t) = \frac{2}{3}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}(2\cdot 0+1)\psi_0 + \frac{2}{3}e^{-i\frac{3}{2}\omega t}(2\cdot 1+1)\psi_1 +$$

$$-\frac{i}{3}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}(2\cdot 2+1)\psi_2 = \frac{2}{3}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}\psi_0 + \frac{2}{3}e^{-i\frac{3}{2}\omega t}\cdot 3\psi_1 +$$

$$+\frac{-i}{3}e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\cdot 5\psi_2$$

Insgesamt (wir benutzen Ortonormalität):

$$\langle x^2\rangle(t) = \frac{x_0^2}{2}\left[\int dx\, \psi^*(x,t)\left(a^2 + 2a^\dagger a + 1 + (a^\dagger)^2\right)\psi(x,t)\right] =$$

$$= \frac{x_0^2}{2}\int\left[\frac{2}{3}e^{+i\frac{1}{2}\omega t}\psi_0^*\cdot\left(-\frac{i}{3}\sqrt{2}\,e^{-i\frac{5}{2}\omega t}\right)\psi_0 + \frac{i}{3}e^{i\frac{5}{2}\omega t}\psi_2^*\cdot\frac{2}{3}e^{-i\frac{1}{2}\omega t}\sqrt{2}\,\psi_2 +\right.$$

$$\left. + \frac{4}{9}\psi_0^*\psi_0 + \frac{4}{9}\cdot 3\psi_1^*\psi_1 + \frac{1}{9}\cdot 5\psi_2^*\psi_2\right] =$$

$$= \frac{x_0^2}{2}\left(\frac{21}{9} - \frac{4\sqrt{2}}{9}\sin 2\omega t\right)$$

$\uparrow$

Der Zeitabhängige Teil, kommt von Interferenz zwischen Zuständen mit verschiedenen Quantenzahlen n

Bemerkung: man sieht gleich welche Beiträge $\neq 0$ sind (bei $\langle x^2 \rangle$)

$$\int \psi_0^* a^2 \psi_2 = \int \psi_0^* \sqrt{2}\, a\, \psi_1 = \sqrt{2} \int \psi_0^* \psi_0 = \sqrt{2}$$

$$\int \psi_2^* a^{+2} \psi_0 = \int \psi_2^* a^+ \psi_1 = \sqrt{2} \int \psi_2^* \psi_2 = \sqrt{2}$$

$$\int \psi_n^* \underbrace{(2\hat{n}+1)}_{=2a^+a+1} \psi_n = (2n+1) \int \psi_n^* \psi_n = 2n+1$$

Man muss dazu noch die entsprechende Zeitfaktoren nicht vergessen!