Musterlösung Aufgabe 13

$$H = \varepsilon_1 |1\rangle\langle 1| + \varepsilon_2 |2\rangle\langle 2| + \varepsilon_3 |3\rangle\langle 3| + t\,|2\rangle\langle 3| + t\,|3\rangle\langle 2|$$

zuerst: $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -t$

a) In der Basis $\{|i\rangle\}$: $H \overset{\{i\}}{=} \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & -t & t \\ 0 & t & -t \end{pmatrix}$

Eigenwerte: $E_1 = -t$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad : |v_1\rangle = |1\rangle$

$E_2 = -2t$ $\quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad : |v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|3\rangle - |2\rangle)$

$E_3 = 0$ $\quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad : |v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2\rangle + |3\rangle)$

b) Für <u>alle</u> Basiswechsel-Transformationen wir benutzen die $\mathbb{1}$. In Notation von Vorlesung:

$\{|\Phi_n\rangle\}$ - alte Basis

$\{|\tilde{\Phi}_m\rangle\}$ - neue Basis

$$\mathbb{1} = \sum_n |\Phi_n\rangle\langle\Phi_n| \quad \text{oder} \quad \mathbb{1} = \sum_m |\tilde{\Phi}_m\rangle\langle\tilde{\Phi}_m|$$

Um Matrixelemente U_{mn} zu finden wir multiplizieren die $\mathbb{1}$:

$$(*) \quad \mathbb{1} = \sum_{nm} |\tilde{\Phi}_m\rangle \underbrace{\langle\tilde{\Phi}_m|\Phi_n\rangle}_{U_{mn}} \langle\Phi_n| = \underbrace{\sum_{nm} U_{mn} |\tilde{\Phi}_m\rangle\langle\Phi_n|}_{\text{eine andere Darstellung von } \mathbb{1} \text{ die wir für Basiswechsel benutzen}}$$

Der Basiswechseloperator $\hat{U}$ wurde von uns nich benutzt in der Übung. Wir haben nur (*) benutzt. Formell aber:

$$\hat{U} = \sum_n |\tilde{\Phi}_n\rangle\langle\Phi_n|$$

Sodass in alte Basis: $\{|\Phi_n\rangle\}$

$$U_{mn}^{\{\Phi_n\}} = \langle\Phi_m|\hat{U}|\Phi_n\rangle = \sum_{n'} \langle\Phi_m|\tilde{\Phi}_{n'}\rangle \underbrace{\langle\Phi_{n'}|\Phi_n\rangle}_{\delta_{nn'}} =$$

$$= \langle\Phi_m|\tilde{\Phi}_n\rangle$$

Oder in neue Basis: $\{|\tilde{\Phi}_n\rangle\}$

$$U_{mn}^{\{\tilde{\Phi}_n\}} = \langle\tilde{\Phi}_m|\hat{U}|\tilde{\Phi}_m\rangle = \sum_{n'} \underbrace{\langle\tilde{\Phi}_m|\tilde{\Phi}_{n'}\rangle}_{\delta_{mn'}}\langle\Phi_{n'}|\tilde{\Phi}_n\rangle =$$

$$= \langle\Phi_m|\tilde{\Phi}_n\rangle$$

Für praktische Rechnungen wir benutzen aber immer die $\mathbb{1}$ (z.B. aus (*))

Für die Aufgabe: $\mathbb{1} = \sum_{ij} |v_j\rangle\langle v_j|i\rangle\langle i| =$

$$= \sum_{ij} \langle v_j|i\rangle\, |v_j\rangle\langle i| =$$

$$= |v_1\rangle\langle 1| - \frac{1}{\sqrt{2}}|v_2\rangle\langle 2| + \frac{1}{\sqrt{2}}|v_2\rangle\langle 3| +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}|v_3\rangle\langle 2| + \frac{1}{\sqrt{2}}|v_3\rangle\langle 3| \qquad (**)$$

$$|\psi\rangle = -\frac{2i}{3}|1\rangle + \frac{2}{3}|2\rangle + \frac{1}{3}|3\rangle$$

$$\text{II}\quad |\psi\rangle \underset{\substack{\uparrow \\ \text{aus } (**)}}{=} -\frac{2i}{3}|v_1\rangle - \frac{2}{3\sqrt{2}}|v_2\rangle + \frac{2}{3\sqrt{2}}|v_3\rangle + \frac{1}{3\sqrt{2}}|v_2\rangle + \frac{1}{3\sqrt{2}}|v_3\rangle =$$

$$= -\frac{2i}{3}|v_1\rangle - \frac{1}{3\sqrt{2}}|v_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|v_3\rangle$$

Eigentlich ist es in meisten Fällen den Basiswechsel direkter zu machen:

$$|1\rangle = |v_1\rangle$$
$$|2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|v_3\rangle - |v_2\rangle\right)$$
$$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|v_3\rangle + |v_2\rangle\right)$$

Dann:

$$|\psi\rangle = -\frac{2i}{3}|v_1\rangle + \frac{2}{3\sqrt{2}}\left(|v_3\rangle - |v_2\rangle\right) + \frac{1}{3\sqrt{2}}\left(|v_3\rangle + |v_2\rangle\right) =$$

$$= -\frac{2i}{3}|v_1\rangle - \frac{1}{3\sqrt{2}}|v_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|v_3\rangle \qquad (***)$$

6). Die Messwerte sind E_i und Wahrscheinlichkeiten kann man von der Darstellung $(***)$ ablesen:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= -t \quad ; \quad p_1 = \left|-\frac{2i}{3}\right|^2 = \frac{4}{9} \\ E_2 &= -2t \quad ; \quad p_2 = \left|\frac{-1}{3\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{18} \\ E_3 &= 0 \quad ; \quad p_3 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \quad \frac{4}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{2} = \underline{1}$$

(immer checken...)

$$\langle E\rangle = \langle\psi|E|\psi\rangle = \sum_i p_i E_i = -\frac{5}{9}$$

d) Zuerst brauchen wir EF und EW von A: (4)

In Basis $\{|i\rangle\}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix}$$

$a_1 = 0 \qquad |u_1\rangle = |1\rangle$

$a_2 = -1 \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$

$|u_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-i|2\rangle + |3\rangle\right)$

$a_3 = 1 \qquad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$

$|u_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(i|2\rangle + |3\rangle\right)$

Wir müssen jetzt $|\psi\rangle$ in Eigenbasis von A schreiben:

$|1\rangle = |u_1\rangle$

$|2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle - |u_3\rangle\right)$

$|3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_2\rangle + |u_3\rangle\right)$

$$|\psi\rangle = -\frac{2i}{3}|u_1\rangle + \frac{1}{3\sqrt{2}}\left[(2i+1)|u_2\rangle + (1-2i)|u_3\rangle\right]$$

Messwerte:

$a_1 = 0, \quad p_1 = \left|\frac{-2i}{3}\right|^2 = \frac{4}{9}$

$a_2 = -1, \quad p_2 = \left|\frac{2i+1}{3\sqrt{2}}\right| = \frac{5}{18}$

$a_3 = 1, \quad p_3 = \left|\frac{1-2i}{3\sqrt{2}}\right| = \frac{5}{18}$

$$\langle A\rangle = \sum_i a_i p_i = 0$$

e) Wir kennen H in $\{|i\rangle\}$ Basis:

$$H = \sum_{ij} \underbrace{\langle i|H|j\rangle}_{H_{ij}^{\{i\}}} |i\rangle\langle j|$$

Wir suchen $H = \sum_{nm} \langle \nu_n | H | \nu_m \rangle \, |\nu_n\rangle\langle \nu_m| =$

$\mathbb{1}$ $\mathbb{1}$

$$= \sum_{ij} \sum_{nm} \langle \nu_n | i\rangle\langle i|H|j\rangle\langle j|\nu_m\rangle |\nu_n\rangle\langle\nu_m|$$

Oder wir benutzen $\mathbb{1}$ aus $(**)$:

$$H = \mathbb{1} H \mathbb{1}^{+} = \Big(|\nu_1\rangle\langle 1| - \tfrac{1}{\sqrt{2}} |\nu_2\rangle\langle 2| + \tfrac{1}{\sqrt{2}} |\nu_2\rangle\langle 3| + \tfrac{1}{\sqrt{2}} |\nu_3\rangle\langle 2| +$$

$$+ \tfrac{1}{\sqrt{2}} |\nu_3\rangle\langle 3| \Big) H \Big(|1\rangle\langle\nu_1| - \tfrac{1}{\sqrt{2}} |2\rangle\langle\nu_2| + \tfrac{1}{\sqrt{2}} |3\rangle\langle\nu_2| + \tfrac{1}{\sqrt{2}} |2\rangle\langle\nu_3| +$$

$$+ \tfrac{1}{\sqrt{2}} |3\rangle\langle\nu_3| \Big) = -t\, |\nu_1\rangle\langle\nu_1| - \tfrac{1}{2}(3+\alpha)t\, |\nu_2\rangle\langle\nu_2| +$$

$$+ \tfrac{1}{2} t (1-\alpha) \Big[|\nu_3\rangle\langle\nu_3| + |\nu_3\rangle\langle\nu_2| + |\nu_2\rangle\langle\nu_3| \Big]$$

$$H^{\{\nu_i\}} = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}(3+\alpha)t & \frac{1}{2}(1-\alpha)t \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\alpha)t & \frac{1}{2}(1-\alpha)t \end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ mit $\alpha \neq 1$ nicht mehr diagonal in Basis $\{|\nu_i\rangle\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -t \\ \varepsilon_3 = -\alpha t \end{array} \right.$$

Aufgabe 11

a) 2D HO : $V(x,y) = V_x(x) + V_y(y)$

$$H = H_x(x) + H_y(y)$$

Dann $\quad H\,\Psi_{n_x,n_y}(x,y) = E_{n_x n_y}\Psi_{n_x,n_y}(x,y)$

mit $\quad E_{n_x n_y} = E_{n_x} + E_{n_y}$ und $\Psi_{n_x n_y}(x,y) \equiv \Psi_{n_x}(x/x_0)\,\Psi_{n_y}(y/y_0)$

(Separationsansatz)

wobei $\quad H_x \Psi_{n_x} = E_{n_x}\Psi_{n_x}$ und $H_y \Psi_{n_y} = E_{n_y}\Psi_{n_y}$

Die 2D Lösung lässt sich als Produkt der 1D Lösungen konstruieren. Vorsicht! $\omega_x \neq \omega_y$ da ist $x_0 \neq y_0$ und Ψ_{n_x} und Ψ_{n_y} haben andere Parameter und auch Normierungskonstante

$$x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_x}}\;;\quad y_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega_y}}$$

Die Eigenenergien sind jetzt von 2 Quantenzahlen abhängig: n_x, n_y :

$$E_{n_x,n_y} = \hbar\omega_x\left(n_x + \tfrac{1}{2}\right) + \hbar\omega_y\left(n_y + \tfrac{1}{2}\right) = \left\{\text{mit } \omega_y = 2\omega_x\right\}$$

$$= \hbar\omega_x\left(n_x + 2n_y + \tfrac{3}{2}\right)$$

b) Energien:

$E_0 = E_{0,0} = \frac{3}{2}\hbar\omega_x \quad (n_x = 0, n_y = 0)$ Grundzustand (nicht entartet)

$E_1 = E_{1,0} = \frac{5}{2}\hbar\omega_x \quad (n_x = 1, n_y = 0)$ 1. angeregte Zustand (nicht entartet)

$E_2 = E_{2,0} = E_{0,1} = \frac{7}{2}\hbar\omega_x \quad \left.\begin{array}{l} (n_x = 2, n_y = 0 \\ \text{oder } n_x = 0, n_y = 1) \end{array}\right\}$ 2. angeregte Zustand ist 2-fach entartet

$E_3 = E_{3,0} = E_{1,1} = \frac{9}{2}\hbar\omega_x \quad \left.\begin{pmatrix} n_x = 3, n_y = 0 \\ \text{oder } n_x = 1, n_y = 1 \end{pmatrix}\right\}$ 3. angeregte Zustand ist 2-fach entartet

$E_4 = E_{4,0} = E_{2,1} = E_{0,2} = \frac{11}{2}\hbar\omega_x \quad \left\{\begin{array}{l} n_x = 4 \quad n_y = 0 \\ n_x = 2 \quad n_y = 1 \\ n_x = 0 \quad n_y = 2 \end{array}\right\}$ 4. angeregte Zustand ist 3-fach entartet

c) $|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|g\rangle + i|e\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underbrace{|0,0\rangle}_{\text{Energie: } \frac{3}{2}\hbar\omega_x} + i\underbrace{|1,0\rangle}_{\frac{5}{2}\hbar\omega_x}\right)$

Mögliche Messwerte: $E_0 = \frac{3}{2}\hbar\omega_x, \quad P_0 = \frac{1}{2}$

$E_1 = \frac{5}{2}\hbar\omega_x, \quad P_1 = \frac{1}{2}$

$\langle E \rangle = \sum_i E_i p_i = 2\hbar\omega_x$

d) 3

Die Zeitentwicklung von Eigenzuständen ist bekannt:

$$|n_x, n_y\rangle(t) = e^{-iE_{n_x n_y}/\hbar \, t} \, |n_x, n_y\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{3}{2} i\omega_x t} \, |0,0\rangle + i e^{-\frac{5}{2} i\omega_x t} \, |1,0\rangle\right)$$

$$\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(a_x + a_x^{+}\right) \qquad \hat{p}_y = \frac{-i\hbar}{\sqrt{2}\, y_0}\left(a_y - a_y^{+}\right)$$

$$a_x |0,0\rangle = 0$$

$$a_x^{+} |0,0\rangle = |1,0\rangle$$

$$a_x |1,0\rangle = |0,0\rangle$$

$$a_x^{+} |1,0\rangle = \sqrt{2}\, |2,0\rangle$$

Zur $\langle x \rangle$ tragen nur $\langle 0,0 | a_x | 1,0\rangle$ und $\langle 1,0 | a_x^{+} | 0,0\rangle$ bei.

Zur $\langle p_y \rangle$ sind keine Beiträge $\neq 0$, weil n_y ist bei $|0,0\rangle$ und $|1,0\rangle$ gleich.

$$\langle x(t) \rangle = \frac{x_0}{\sqrt{2}} \sin(\omega_x t)$$

$$\langle p_y(t) \rangle = 0$$

Energie bleibt konstant mit der Zeit (Erhaltungsgrösse) $\langle E(t) \rangle = \langle E \rangle = 2\hbar\omega$