Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch

1. Test zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2018/2019

Freitag, 23.11.2018.

Test A **Name:** **Matrikelnr.:**

A1	A2	A3	A4	Σ
12 + 4*	10	14	14	50+4*

1. Verständnisfragen zur Quantentheorie *3+3+3+3+4*=12+4* Punkte*

a) Gegeben sei die Wellenfunktion $|\psi\rangle = 1/\sqrt{10}\,(3\,|\uparrow\rangle + i\,|\downarrow\rangle)$. Gemessen wird die Observable $O = i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| - i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|$. Was sind die möglichen Messwerte und deren Wahrscheinlichkeiten?

b) Es sei $|\psi\rangle$ ein Zustand, so dass die Messung von $A = |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|$ mit Wahrscheinlichkeit 1 das Ergebnis 1 gibt. Geben Sie den Zustand $|\psi\rangle$ und den Erwartungswert $\langle A\rangle$ an.

c) Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{C}$ sind die Operatoren $O = e^{\lambda A}$ und $O' = (\lambda A)^2$ (i) hermitesch, (ii) unitär und (iii) linear für beliebige lineare hermitesche Operatoren A?

d) Doppelspaltexperiment: Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\psi(y)|^2$ im Doppelspaltexperiment ohne Messung durch welchen Spalt das Teilchen geflogen ist (die beiden Spalte unterscheiden sich durch die y-Koordinate). Ein/e Physikstudent/in baut jetzt einen Messapparat, der mit 0/1 angibt, ob das Teilchen durch den oberen oder unteren Spalt durchgeflogen ist. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einschläge, für die 0 bzw. für die 1 gemessen wurde, sowie alle Einschläge insgesamt für den Doppelspalt mit dem neuen Messapparat.

e*) Die Wellenfunktion eines stationären, gebundenen Zustands sei gegeben durch $\psi(x) = Ax^n e^{-\gamma x}$ für $x > 0$ und $\psi(x) = 0$ für $x < 0$, wobei $n > 1$, $\gamma > 0$ sowie $V(x \to \infty) = 0$ und $V(x) = \infty$ für $x < 0$. Wie lautet das Potential $V(x)$, in welchem sich das durch $\psi(x)$ beschriebene Teilchen bewegt? Bestimmen Sie auch die Energie des Zustands.

2. Kinetische Energie *4+3+3=10 Punkte*

Betrachten Sie den Hamilton Operator $H = p^2/2m + V(x)$. Das Eigenwertproblem von H sei diskret: $H|\phi_n\rangle = E_n|\phi_n\rangle$, mit $n \in \mathbb{N}_0$.

a) Man berechne $[x, H]$ und zeige, dass gilt $\langle\phi_n|p|\phi_{n'}\rangle = \alpha\langle\phi_n|x|\phi_{n'}\rangle$ und bestimme α.

b) Zeigen Sie damit, dass

$$\frac{\hbar^2}{m^2}\langle\phi_n|p^2|\phi_n\rangle = \sum_{n'}(E_n - E_{n'})^2\,|\langle\phi_n|x|\phi_{n'}\rangle|^2\,. \tag{1}$$

c) Benutzen Sie Gleichung (1) aus **b)**: Was ergibt sich damit für den Erwartungswert der kinetischen Energie $\langle T\rangle_n = \langle\phi_n|p^2|\phi_n\rangle/(2m)$ im Eigenzustand $|\phi_n\rangle$ für den Fall des harmonischen Oszillators (Frequenz: ω)? Interpretieren Sie das Resultat, welches ein Spezialfall des sogenannten Virial Theorems ist.

3. Quantenmechanisches Teilchen in einer Dimension *5+5+4 Punkte*

Wir betrachten ein Teilchen, das sich in dem Potential

$$V(x) = -\gamma\,\delta\left(\frac{2m}{\hbar^2}\,x\right) \tag{2}$$

bewegt. Dabei sei δ die delta-Distribution und γ eine positive Konstante. Die Masse m ist als bekannt anzunehmen.

a) Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für eine von links einfallende, nicht normierbare, ebene Welle, welche an dem Potential gestreut wird.

b) Bestimmen Sie den Transmissions- sowie den Reflexionskoeffizienten. In welcher Beziehung stehen die beiden Zahlen zueinander?

c) Zeigen Sie, dass das System nur einen gebunden Zustand erlaubt. Bestimmen Sie Zeitentwicklung seiner Eigenfunktion und interpretieren Sie selbige.

4. Zeitentwicklung eines Zustands im Potential des harmonischen Oszillators *3+3+5+3=14 Punkte*

Wir betrachten ein Teilchen in einem harmonischen Oszillator (Masse m, Frequenz ω) dessen Wellenfunktion bei $t = 0$ durch

$$\psi(x, t = 0) = \frac{2}{3}\psi_0(x) + \frac{2}{3}\psi_1(x) - \frac{i}{3}\psi_3(x)$$

beschrieben wird, wobei $\psi_n(x)$ die normierte Eigenfunktion des n-ten angeregten Zustands bezeichnet.

a) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung des Zustands, d.h. $\psi(x, t)$.

b) Geben Sie zum Zeitpunkt $t = 0$ und zu jedem späteren Zeitpunkt $t > 0$ die möglichen Messwerte und jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für die Energie des harmonischen Oszillators im Zustand $\psi(x, t)$ an. Berechnen Sie auch den Energieerwartungswert $\langle E \rangle$.

c) Bestimmen Sie die zeitabhängigen Erwartungswerte $\langle x \rangle(t)$ und $\langle p^2 \rangle(t)$.

d) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, das Teilchen zum Zeitpunkt $t > 0$ in einem infinitesimal kleinen Intervall dx um $x = 0$ zu finden.

Viel Erfolg!