Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch

# 1. Test zur Quantenmechanik I

*Wintersemester 2018/2019*

**Freitag, 23.11.2018**.

**Test B** **Name:** **Matrikelnr.:**

| B1 | B2 | B3 | B4 | Σ |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| 14 | 10 | 12 + 4* | 14 | 50+4* |

## 1. Streuung in einer Dimension

*5+5+4=14 Punkte*

Wir betrachten ein Teilchen, das sich in dem Potential

$$V(x) = b\,\delta\left(\frac{2m}{\hbar^2}\,x\right) \tag{1}$$

bewegt. Dabei sei $\delta$ die delta-Distribution und $b < 0$ eine Konstante. Die Masse $m$ ist als bekannt anzunehmen.

**a)** Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für eine von links einfallende, nicht normierbare, ebene Welle, welche an dem Potential gestreut wird.

**b)** Bestimmen Sie den Transmissions- sowie den Reflexionskoeffizienten. In welcher Beziehung stehen die beiden Zahlen zueinander?

**c)** Zeigen Sie, dass das System nur einen gebunden Zustand erlaubt. Bestimmen Sie Zeitentwicklung seiner Eigenfunktion und interpretieren Sie selbige.

## 2. Virialtheorem

*4+3+3=10 Punkte*

Betrachten Sie den Hamilton Operator $H = p^2/2m + V(x)$. Das Eigenwertproblem von $H$ sei diskret: $H|\psi_n\rangle = \epsilon_n|\psi_n\rangle$, mit $n \in \mathbb{N}_0$.

**a)** Man berechne $[x, H]$ und zeige, dass gilt $\langle\psi_n|p|\psi_{n'}\rangle = \gamma\langle\psi_n|x|\psi_{n'}\rangle$ und bestimme $\gamma$.

**b)** Zeigen Sie damit, dass

$$\frac{\hbar^2}{m^2}\langle\psi_n|p^2|\psi_n\rangle = \sum_{n'}(\epsilon_n - \epsilon_{n'})^2\,|\langle\psi_n|x|\psi_{n'}\rangle|^2\,. \tag{2}$$

**c)** Benutzen Sie Gleichung (2) aus **b)**: Was ergibt sich damit für den Erwartungswert der kinetischen Energie $\langle T\rangle_n = \langle\psi_n|p^2|\psi_n\rangle/(2m)$ im Eigenzustand $|\psi_n\rangle$ für den Fall des harmonischen Oszillators (Frequenz: $\omega$)? Interpretieren Sie das Resultat, welches ein Spezialfall des sogenannten Virial Theorems ist.

## 3. Theorie-Aufgaben

*3+3+3+3+4*=12+4* Punkte*

**a)** Doppelspaltexperiment: Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung $|\psi(y)|^2$ im Doppelspaltexperiment ohne Messung durch welchen Spalt das Teilchen geflogen ist (die beiden Spalte unterscheiden sich durch die $y$-Koordinate). Ein/e Physikstudent/in baut jetzt einen Messapparat, der mit 0/1 angibt, ob das Teilchen durch den oberen oder unteren Spalt durchgeflogen ist. Skizzieren Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Einschläge, für die 0 bzw. für die 1 gemessen wurde, sowie alle Einschläge insgesamt für den Doppelspalt mit dem neuen Messapparat.

**b)** Gegeben sei die Wellenfunktion $|\psi\rangle = 1/\sqrt{10}\,(\,|\uparrow\rangle - 3i\,|\downarrow\rangle)$. Gemessen wird die Observable $A = i|\downarrow\rangle\langle\uparrow| - i|\uparrow\rangle\langle\downarrow|$. Was sind die möglichen Messwerte und deren Wahrscheinlichkeiten?

**c)** Es sei $|\psi\rangle$ ein Zustand, so dass die Messung von $O = |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow|$ mit Wahrscheinlichkeit 1 das Ergebnis 1 gibt. Geben Sie den Zustand $|\psi\rangle$ und den Erwartungswert $\langle O\rangle$ an.

**d)** Für welche Werte von $\gamma \in \mathbb{C}$ sind die Operatoren $A = e^{\gamma O}$ und $A' = (i\gamma O)^2$ (i) hermitesch, (ii) unitär und (iii) linear für beliebige lineare hermitesche Operatoren $O$?

**e*)** Die Wellenfunktion eines stationären, gebundenen Zustands sei gegeben durch $\psi(x) = Ax^n e^{-\gamma x}$ für $x > 0$ und $\psi(x) = 0$ für $x < 0$, wobei $n > 1$, $\gamma > 0$ sowie $V(x \to \infty) = 0$ und $V(x) = \infty$ für $x < 0$. Wie lautet das Potential $V(x)$, in welchem sich das durch $\psi(x)$ beschriebene Teilchen bewegt? Bestimmen Sie auch die Energie des Zustands.

## 4. Messung und Zeitentwicklung

*3+3+5+3=14 Punkte*

Wir betrachten ein Teilchen in einem harmonischen Oszillator (Masse $m$, Frequenz $\omega$) dessen Wellenfunktion bei $t = 0$ durch

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{2}\psi_0(x) + \frac{i}{2}\psi_1(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\psi_3(x)$$

beschrieben wird, wobei $\psi_n(x)$ die normierte Eigenfunktion des $n$-ten angeregten Zustands bezeichnet.

**a)** Bestimmen Sie die Zeitentwicklung des Zustands, d.h. $\psi(x, t)$.

**b)** Geben Sie zum Zeitpunkt $t = 0$ und zu jedem späteren Zeitpunkt $t > 0$ die möglichen Messwerte und jeweiligen Wahrscheinlichkeiten für die Energie des harmonischen Oszillators im Zustand $\psi(x, t)$ an. Berechnen Sie auch den Energieerwartungswert $\langle E\rangle$.

**c)** Bestimmen Sie die zeitabhängigen Erwartungswerte $\langle x\rangle(t)$ und $\langle p^2\rangle(t)$.

**d)** Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, das Teilchen zum Zeitpunkt $t > 0$ in einem infinitesimal kleinen Intervall $dx$ um $x = 0$ zu finden.

Viel Erfolg!