Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch

2. Test zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2018/2019

Freitag, 25.01.2019.

Test A **Name:** **Matrikelnr.:**

A1	A2	A3	A4	Σ
15	10	12 + 5*	13	50+5*

1. Theoriefragen

3+3+5+4=15 Punkte

a) Ist es möglich, eine Kugelflächenfunktion $Y_\ell^m(\theta,\phi)$ (Eigenzustand des Bahndrehimpulsoperators $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$) mit $\ell=\frac{5}{2}$ und $m=\frac{5}{2}$ zu finden? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem allgemeinen Argument.

b) Betrachten Sie ein Elektron in den $2p$ Orbitalen eines ${}_3\mathrm{Li}^{2+}$ Ions. Welche Energieeigenwerte und Eigenkets erhält man, wenn auch der Effekt einer Spin-Bahn Kopplung der Form $H_{SB}=\xi\,\vec{L}\cdot\vec{S}$ (mit $\xi = konst.$) auf diesen Zustand berücksichtigt wird?

c) Gegeben sei ein Teilchen mit der Wellenfunktion $\psi(\vec{r})\propto \mathrm{e}^{-i\frac{\bar{p}}{\sqrt{2}\hbar}(x+y)}$. Was sind die Erwartungswerte von p^2 und p_x für diesen Zustand? Betrachten Sie nun die unitäre Transformation $U=\mathrm{e}^{-i\frac{L_z}{\hbar}(-\frac{\pi}{4})}$ (mit $L_z=xp_y-yp_x$), und überlegen Sie, wie sich die Anwendung dieser Transformation auf den Zustand ψ auswirkt: Geben Sie den transformierten Zustand $\psi'(\vec{r})=U\psi(\vec{r})$ und die Erwartungswerte von p^2 und p_x für ψ' an (keine expliziten Rechnungen notwendig). Wie müssen die Operatoren p^2 und p_x transformiert werden, sodass die Erwartungswerte der transformierten Operatoren unverändert bleiben?

d) Gegeben sei der verschobene eindimensionale harmonische Oszillator $H=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\alpha x$. Stellen Sie die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für $x_H(t)$ und $a_H(t)$ auf (inkl. Berechnung allfälliger Kommutatoren. Die entstehende Differentialgleichung mit lediglich $x_H(t)$ bzw. $a_H(t)$ muss nicht gelöst werden). Sind $x_H(t)$ und/oder $a_H(t)$ Erhaltungsgrößen? (*Hinweis:* $x=x_0\frac{1}{\sqrt{2}}[a+a^\dagger]$ mit $x_0^2=\frac{\hbar}{m\omega}$.)

2. Ritzsches Variationsprinzip

10 Punkte

Finden Sie mit dem Ritzschen Variationsprinzip eine Abschätzung für die Grundzustandsenergie des dreidimensionalen harmonischen Oszillators (Masse m, Frequenz ω, $V(\vec{r})=\frac{1}{2}m\omega^2r^2$), indem Sie als Testwellenfunktion $\psi_\lambda(\vec{r})=\exp(-\lambda|\vec{r}|)$ mit $\lambda>0$ verwenden. Sie können für den Grundzustand $l=0$ annehmen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Grundzustandsenergie.
Hinweis:

$$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty t^n e^{-t}dt=n!$$

3. Drei-Niveau-System

1+3+3+3+2+3+2*=12+5* Punkte*

Gegeben sei der folgende Hamilton-Operator, der auf ein Teilchen mit Spin 1 wirkt:

$$H = -\gamma S_z^2 + \lambda\, \mu_B B S_x \tag{1}$$

Die Spin-1-Operatoren in der S_z-Basis sind unten angegeben.

a) Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren des ungestörten Hamilton-Operators ($\lambda = 0$)?

b) Was sind die exakten Eigenwerte und Eigenvektoren des gesamten Hamilton-Operators?

Wir betrachten nun den zweiten Term in Gl. 1 als Störung ($\lambda \ll 1$).

c) Ein Teil der ungestörten Eigenzustände ist für $\lambda = 0$ nicht-entartet. Berechnen Sie die Energiekorrekturen zu all diesen Zuständen, sowie die Korrekturen zu diesen Zuständen selber bis zur 1. Ordnung Störungstheorie in λ.

d) Berechnen Sie die Energiekorrekturen der nicht-entarteten Zustände bis zur 2. Ordnung in λ.

e) Entwickeln Sie die exakten Eigenwerte aus **b)** nach Potenzen in λ und vergleichen mit Ihren Ergebnissen aus **c)** und **d)**

f*) Berechnen Sie jetzt die Energiekorrekturen aller entarteten Zustände bis zur 2. Ordnung in λ, sowie die Korrekturen zu diesen Zuständen selbst bis zur 1. Ordnung in λ.

g*) Vergleichen Sie die obigen Energiekorrekturen aller entarteten Zustände, sowie die Korrekturen zu diesen Zuständen mit den exakten Eigenzuständen und der Entwicklung der exakten Eigenwerte aus **b)** nach Potenzen in λ. Geben Sie eine Begründung für die Abweichungen der Energiekorrekturen in Störungstheorie im Vergleich zur Entwicklung der exakten Eigenwerte.

Hinweis:

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_z = \hbar \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

4. Messungen an einem Zustand mit $l = 1$

2+3+3+2+3=13 Punkte

Betrachten Sie ein Teilchen mit einem Bahndrehimpuls $2\hbar^2$ ($l = 1$) in einem Kristallfeld mit einer Anisotropie in x-Richtung. Der Hamilton-Operator für dieses Problem lautet:

$$H = \frac{L^2}{2I} \;+\; \alpha|m{=}0\rangle\langle m{=}0| \;+\; \alpha|m{=}1\rangle\langle m{=}{-1}| \;+\; \alpha|m{=}{-1}\rangle\langle m{=}1| \tag{3}$$

wobei I und α reelle, positive Konstanten sind; $|m\rangle$ sind die Eigenzustände des L_z-Operators.

a) Geben Sie die Eigenenergien und Eigenzustände des Systems an.

b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wurde für den Drehimpuls in z-Richtung $m = -1$ gemessen. Berechnen Sie die Zeitentwicklung des entstandenen Zustandes.

c) Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ wird eine weitere L_z-Messung vorgenommen. Bestimmen Sie die möglichen Messwerte, sowie deren Wahrscheinlichkeiten.

d) Schreiben Sie die Eigenfunktionen aus **a)** als lineare Kombinationen von Kugelflächenfunktionen. Wie können Sie die Eigenfunktionen also auch bezeichnen?

e) Konstruieren Sie eine Observable, die mit H ein vSkO für den Unterraum $l = 1$ bildet.