Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch

2. Test zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2018/2019

Freitag, 25.01.2019.

Test B **Name:** **Matrikelnr.:**

B1	B2	B3	B4	Σ
15	10	13	12 + 5*	50+5*

1. Theoriefragen

3+3+4+5=15 Punkte

a) Betrachten Sie ein Elektron in den $2p$ Orbitalen eines ${}_{92}\mathrm{U}^{91+}$ Ions. Welche Energieeigenwerte und Eigenkets erhält man, wenn auch der Effekt einer Spin-Bahn Kopplung der Form $H_{SB} = \xi\, \vec{L} \cdot \vec{S}$ (mit $\xi = konst.$) auf diesen Zustand berücksichtigt wird?

b) Ist es möglich, eine Kugelflächenfunktion $Y_\ell^m(\theta, \phi)$ (Eigenzustand des Bahndrehimpulsoperators $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$) mit $\ell = \frac{7}{2}$ und $m = \frac{7}{2}$ zu finden? Begründen Sie Ihre Antwort mit einem allgemeinen Argument.

c) Gegeben sei der verschobene eindimensionale harmonische Oszillator $H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 - \alpha x$. Stellen Sie die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für $x_H(t)$ und $a_H(t)$ auf (inkl. Berechnung allfälliger Kommutatoren. Die entstehende Differentialgleichung mit lediglich $x_H(t)$ bzw. $a_H(t)$ muss nicht gelöst werden). Sind $x_H(t)$ und/oder $a_H(t)$ Erhaltungsgrößen? (*Hinweis:* $x = x_0 \frac{1}{\sqrt{2}}[a + a^\dagger]$ mit $x_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega_0}$.)

d) Gegeben sei ein Teilchen mit der Wellenfunktion $\psi(\vec{r}) \propto \mathrm{e}^{-i\frac{\bar{p}}{\sqrt{2}\hbar}(x+y)}$. Was sind die Erwartungswerte von p^2 und p_x für diesen Zustand? Betrachten Sie nun die unitäre Transformation $U = \mathrm{e}^{-i\frac{L_z}{\hbar}\frac{\pi}{4}}$ (mit $L_z = xp_y - yp_x$), und überlegen Sie, wie sich die Anwendung dieser Transformation auf den Zustand ψ auswirkt: Geben Sie den transformierten Zustand $\psi'(\vec{r}) = U\psi(\vec{r})$ und die Erwartungswerte von p^2 und p_x für ψ' an (keine expliziten Rechnungen notwendig). Wie müssen die Operatoren p^2 und p_x transformiert werden, sodass die Erwartungswerte der transformierten Operatoren unverändert bleiben?

2. Dreidimensionaler harmonischer Oszillator

10 Punkte

Finden Sie mit dem Ritzschen Variationsprinzip eine Abschätzung für die Grundzustandsenergie des dreidimensionalen harmonischen Oszillators (Masse m, Frequenz ω_0, $V(\vec{r}) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$), indem Sie als Testwellenfunktion $\psi_\lambda(\vec{r}) = N\exp(-\lambda|\vec{r}|)$ mit $\lambda > 0$ verwenden. Sie können für den Grundzustand $l = 0$ annehmen. Vergleichen Sie das Ergebnis mit der exakten Grundzustandsenergie.
Hinweis:

$$\Gamma(n+1) = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$$

3. Drei-Niveau-System

2+3+3+2+3=13 Punkte

Betrachten Sie ein Teilchen mit einem Bahndrehimpuls $2\hbar^2$ ($l = 1$) in einem Kristallfeld mit einer Anisotropie in x-Richtung. Der Hamilton-Operator für dieses Problem lautet:

$$H = \frac{L^2}{2I} \;+\; \gamma|m{=}0\rangle\langle m{=}0| \;+\; \gamma|m{=}1\rangle\langle m{=}{-1}| \;+\; \gamma|m{=}{-1}\rangle\langle m{=}1| \tag{1}$$

wobei I und γ reelle, positive Konstanten sind; $|m\rangle$ sind die Eigenzustände des L_z-Operators.

a) Geben Sie die Eigenenergien und Eigenzustände des Systems an.

b) Zum Zeitpunkt $t = 0$ wurde für den Drehimpuls in z-Richtung $m = 1$ gemessen. Berechnen Sie die Zeitentwicklung des entstandenen Zustandes.

c) Zu einem späteren Zeitpunkt $t > 0$ wird eine weitere L_z-Messung vorgenommen. Bestimmen Sie die möglichen Messwerte, sowie deren Wahrscheinlichkeiten.

d) Schreiben Sie die Eigenfunktionen aus **a)** als lineare Kombinationen von Kugelflächenfunktionen. Wie können Sie die Eigenfunktionen also auch bezeichnen?

e) Konstruieren Sie eine Observable, die mit H ein vSkO für den Unterraum $l = 1$ bildet.

4. Spin-1 Teilchen im Magnetfeld

1+3+3+3+2+3+2*=12+5* Punkte*

Gegeben sei der folgende Hamilton-Operator, der auf ein Teilchen mit Spin 1 wirkt:

$$H = -\alpha S_z^2 + \lambda\, B S_x \tag{2}$$

Die Spin-1-Operatoren in der S_z-Basis sind unten angegeben.

a) Was sind die Eigenwerte und Eigenvektoren des ungestörten Hamilton-Operators ($\lambda = 0$)?

b) Was sind die exakten Eigenwerte und Eigenvektoren des gesamten Hamilton-Operators?

Wir betrachten nun den zweiten Term in Gl. 2 als Störung ($\lambda \ll 1$).

c) Ein Teil der ungestörten Eigenzustände ist für $\lambda = 0$ nicht-entartet. Berechnen Sie die Energiekorrekturen zu all diesen Zuständen, sowie die Korrekturen zu diesen Zuständen selber bis zur 1. Ordnung Störungstheorie in λ.

d) Berechnen Sie die Energiekorrekturen der nicht-entarteten Zustände bis zur 2. Ordnung in λ.

e) Entwickeln Sie die exakten Eigenwerte aus **b)** nach Potenzen in λ und vergleichen mit Ihren Ergebnissen aus **c)** und **d)**

f*) Berechnen Sie jetzt die Energiekorrekturen aller entarteten Zustände bis zur 2. Ordnung in λ, sowie die Korrekturen zu diesen Zuständen selbst bis zur 1. Ordnung in λ.

g*) Vergleichen Sie die obigen Energiekorrekturen aller entarteten Zustände, sowie die Korrekturen zu diesen Zuständen mit den exakten Eigenzuständen und der Entwicklung der exakten Eigenwerte aus **b)** nach Potenzen in λ. Geben Sie eine Begründung für die Abweichungen der Energiekorrekturen in Störungstheorie im Vergleich zur Entwicklung der exakten Eigenwerte.

Hinweis:

$$S_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}, \quad S_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{bmatrix}, \quad S_z = \hbar\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix} \tag{3}$$