Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch

2. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2018/2019

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 19.10.2018.

3. Teilchen im unendlich tiefen Potentialtopf *2+1+1+1=5 Punkte*

In der Vorlesung haben Sie die Beschreibung eines freien Teilchens in Form einer Wellenfunktion als ebene Welle (oder als Superpositionen mehrerer ebener Wellen) kennen gelernt. Beschränkt man den Raum, in welchem sich das Teilchen frei bewegen kann, so ergeben sich *Randbedingungen*, welche die Menge der gültigen Wellenfunktionen einschränken und oft (bei gebundenen Zuständen) das erlaubte Energiespektrum *quantisieren*. Betrachten Sie nun ein freies Teilchen, das sich in einer Dimension bewegen kann, aber in einer Kiste der Länge L eingesperrt ist. Dieses System kann durch eine (stationäre) Schrödingergleichung mit unendlich großem Potential beschrieben werden, d.h.

$$H\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi = E\psi \qquad \text{mit} \qquad V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le L \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

a) Welche Randbedingungen impliziert das Potential $V(x)$ für die Wellenfunktion $\psi(x)$? Lösen Sie diese Schrödingergleichung unter dieser Randbedingung: Wie lauten die (normierten) Eigenfunktionen $\psi_n(x)$ und die dazugehörigen Eigenenergien E_n?

Das Teilchen befinde sich (i) im Grundzustand $\psi_1(x)$, (ii) im ersten angeregten Zustand $\psi_2(x)$.

b) Berechnen Sie für beide Fälle den Erwartungswert des Ortes $\langle x\rangle$ und vergleichen Sie selbigen mit den Positionen x, an welchen es am wahrscheinlichsten ist, das Teilchen anzutreffen.

c) Berechnen Sie für beide Fälle den Erwartungswert des Impulses $\langle p\rangle$. Was sagt Ihr Ergebnis über die „Bewegung“ des Teilchens aus?

d) Das Teilchen befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ in folgendem Zustand:

$$\phi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{L}}\left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right] \tag{1}$$

Geben Sie für diesen die Zeitentwicklung $\phi(x, t)$ an.

4. Gaußsche Wellenpakete

1+2+1+1=5 Punkte

Ein freies Teilchen der Masse m bewege sich in einer Dimension. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei die Wellenfunktion gegeben durch ($\alpha > 0$, $x_0 \in \mathbb{R}$)

$$\psi(x, t = 0) = A \left[\exp(-\alpha(x + x_0)^2/2) + \exp(-\alpha(x - x_0)^2/2) \right] \tag{2}$$

Ziel ist die Bestimmung der zeitabhängigen Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\psi(x, t)|^2$.

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante A.

b) Entwickeln Sie $\psi(x, t = 0)$ nach ebenen Wellen, d.h. bestimmen Sie $\phi(p, t = 0)$ in $\psi(x, t = 0) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \phi(p, t = 0) \exp(ipx/\hbar)$.

c) Ebene Wellen sind Lösungen der freien Schrödinger Gleichung mit der Dispersionsrelation $E = \hbar^2 p^2/2m$. Wie lautet also die Zeitentwicklung von $\phi(p, t)$ für unser freies Teilchen?

d) Bestimmen Sie nun $\psi(x, t)$ und diskutieren Sie $|\psi(x, t)|^2$.