Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch

3. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2018/2019

Dieses Übungsblatt wird in Form eines PLENUMS am Mittwoch, 31.10.2018, vorgerechnet, da leider 2 Übungsfreitage vorlesungsfrei sind. Bitte rechnen Sie die Beispiele vor dem Plenum selbst.

5. Gebundene Zustände

1 Punkte

Zeigen Sie, dass für ein eindimensionales Potential mit $0 < V(x) < \infty$ und $V(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$ keine gebundene Zustände existieren. (Für gebundene Zustände gilt $\int_{-\infty}^{-a} |\psi(x)|^2 dx \to 0$ und $\int_a^\infty |\psi(x)|^2 dx \to 0$ für $a \to \infty$).

6. Streung an zwei δ-Potentialen

5 Punkte

Gehen Sie von der 1-dimensionalen stationären Schrödingergleichung mit dem Potential

$$V(x) = \alpha\, \delta\left(\frac{2m}{\hbar^2}\,(x+a)\right) + \alpha\, \delta\left(\frac{2m}{\hbar^2}\,(x-a)\right). \tag{1}$$

aus. Dabei sei δ die delta-Distribution, a und α positive Konstanten. Die Masse m ist als bekannt anzunehmen.

a) Überlegen Sie, wie die Anschlussbedingungen für die Wellenfunktion $\psi(x)$ an der Stelle der δ-Distribution aussehen. Integrieren Sie dazu z.B. die Schrödingergleichung in einem kleinen Bereich $(-\epsilon, +\epsilon)$ um die Position der Distribution.

b) Lösen Sie die stationäre Schrödinger-Gleichung für eine von links einfallende, nicht normierbare, ebene Welle (e^{ikx}), welche an dem Potential gestreut wird. Insgesamt ergeben sich eine rechts- und eine linkslaufende Welle auf der linken Seite der δ-Distributionen, $x < -a$, ($e^{ikx} + re^{-ikx}$) und eine rechtslaufende Welle (te^{ikx}) auf der rechten Seite, $x > a$.

c) Für welche möglichen Werte der Energie E existieren Lösungen für dieses Problem? Sind die Energien quantisiert (diskret) oder gibt es ein kontinuierliches Spektrum von Eigenenergien?

d) Bestimmen Sie den Transmissions- sowie den Reflexionskoeffizienten. (Sie können in diesem Fall mit $|t|^2$ und $|r|^2$ auf die Wahrscheinlichkeitsdichten der transmittierten und reflektierten Welle schliessen.) In welcher Beziehung stehen die beiden Zahlen zueinander?

e) Was ändert sich qualitativ im Fall $\alpha > 0$?

7. Zeitentwicklung eines Zustands im Potential des harmonischen Oszillators

4 Punkte

Wir betrachten ein Teilchen in einem harmonischen Oszillator dessen Wellenfunktion bei $t = 0$ durch den Mischzustand

$$\psi(x, t = 0) = \alpha \left[\frac{2}{5}\psi_0(x) + \frac{2}{5}\psi_1(x) - \frac{i}{5}\psi_2(x) \right]$$

beschrieben wird, wobei $\psi_n(x)$ den n-ten angeregten Zustand bezeichnet, und wir $\alpha \in C$ annehmen.

a) Normieren Sie ψ, d.h. bestimmen Sie die Konstante α.

b) Bestimmen Sie die Zeitentwicklung des Zustands, d.h. $\psi(x, t)$.

c) Bestimmen die zeitabhängigen Erwartungswerte $\langle x\rangle(t)$, $\langle p\rangle(t)$, und $\langle x^2\rangle(t)$.

d) (*Erst nach der Vorlesung am 24.10. machbar*) In der Vorlesung werden Sie die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren ($a^\dagger$ und a) kennenlernen. Bestimmen Sie die obigen Erwartungswerte noch einmal mit der Hilfe von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren.