Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch

4. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2018/2019

TUTORIUM: Freitag, 9.11.2018.

8. Rechnungen mit Erzeugern und Vernichtern *1.5 Punkte*

Zwischen welchen Eigenzuständen ψ_n des harmonischen Oszilators sind die Matrixelemente von x^2, p^2, x^3 und p^3 nicht null?

9. Kohärente Zustände *0.5+1+0.5=2 Punkte*

In der Vorlesung haben Sie die – als kohärente Zustände bekannten – Eigenfunktionen $\varphi_\alpha(x) = \langle x|\alpha\rangle$ des Vernichtungsoperators a im Kontext des harmonischen Oszillators kennen gelernt: $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, daß kohärente Zustände nicht orthogonal zueinander sind, d.h. bestimmen Sie $\langle\alpha|\beta\rangle$.

b) Zeigen Sie, daß die kohärenten Zustände die Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{C}} d^2\alpha\,|\alpha\rangle\langle\alpha| = 1 \tag{1}$$

erfüllen. Hierbei bedeutet $\int d^2\alpha$ das Integral in der komplexen Ebene, d.h. $\int d\mathrm{Re}(\alpha)d\mathrm{Im}(\alpha)$.

c) Konstruieren Sie, falls möglich, Eigenzustände des Erzeugungsoperators $a^\dagger$ oder beweisen Sie andernfalls, daß $a^\dagger$ keine Eigenzustände besitzt.

10. Harmonischer Oszillator im elektrischen Feld *0.5+2+0.5+1.5+1+1=6.5 Punkte*

Wir betrachten ein geladenes Atom, dessen Bewegung im Kristall sich durch einen eindimensionalen harmonischen Oszillator beschreiben lässt. Ein Beispiel dafür sind Clathrate, in denen 'Gastatome' in einem Art Käfig von 'Hostatomen' eingeschlossen sind. Der Käfig lässt sich dann durch ein harmonisches Potenzial mit einer charakteristische Frequenz ω approximieren. Zusätzlich schalten wir ein homogenes elektrisches Feld ein. Klassisch wird letzteres durch einen Potentialterm $-qEx$ beschrieben, wobei q die Ladung des Atoms, E das elektrische Feld und x die Ortskoordinate ist.

a) Wie lautet der quantenmechanische Hamiltonian H des Systems mit elektrischem Feld? Drücken Sie selbigen auch durch die aus der Vorlesung bekannten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren aus.

b) Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenfunktionen des Systems.

Gegeben sei nun der Operator $T = e^{-\lambda(a-a^\dagger)}$. Die Exponentialfunktion eines Operators ist hierbei durch die entsprechende Reihenentwicklung definiert.

c) Ist der Operator T hermitesch? Ist T unitär, d.h. gilt $TT^\dagger = T^\dagger T = 1$?

d) Transformieren Sie nun die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren mit T, d.h. bestimmen Sie $\widetilde{a} = TaT^\dagger$ und $\widetilde{a}^\dagger = Ta^\dagger T^\dagger$.

e) Berechnen Sie daraus nun den transformierten Hamiltonoperator $\widetilde{H} = TH_0T^\dagger$, wobei H_0 der Hamiltonoperator des ungestörten harmonischen Oszillators (d.h. ohne elektrisches Feld) ist. Für welches λ ergibt sich der Hamiltonoperator aus Teilaufgabe (a)?

f) Drücken Sie nun die Erzeuger und Vernichter im Exponenten von T durch den Impulsoperator aus. Für welches ξ finden Sie $T = \exp(-\frac{i}{\hbar}\xi p)$? Was ergibt sich, wenn man den Operator T auf eine Wellenfunktion in Ortsdarstellung anwendet: $T\psi(x)$? Warum nennt man T auch den Translationsoperator? Bringen Sie dieses Ergebnis in Verbindung mit Aufgabenteil (b).

Hinweis: Verschwinden für zwei Operatoren A, B die Kommutatoren $[A, C]$ und $[B, C]$ wobei $C = [A, B]$, so gelten die folgenden Identitäten:

$$
\begin{aligned}
[A, F(B)] &= [A, B]F'(B) & (2)\\
e^A e^B &= e^{A+B}\, e^{\frac{1}{2}[A,B]} & (3)
\end{aligned}
$$

wobei $F'(B) = \frac{d}{dB}F(B)$ ist.