Technische Universität Wien

Prof. K. Held, Prof. A. Toschi, Dr. J. Tomczak
Dr. A. Kauch

6. Übung zur Quantenmechanik I

Wintersemester 2018/2019

<u>TUTORIUM</u>: Freitag, 30.11.2018.

14. Messprozess und Zeitentwicklung

1+2+1+1=5 Punkte

Gegeben sei ein quantenmechanisches, fixiertes Elektron mit Spin $\frac{1}{2}$ in einem äußeren, in die x-Richtung zeigenden magnetischen Feld B. Der Hamiltonoperator, der die Wechselwirkung des Spins mit dem Magnetfeld beschreibt, sei durch

$$H = gB(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|) \tag{1}$$

gegeben. Hierbei bezeichnet $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ die Basis, in welcher der Spin entlang der z-Richtung nach oben oder unten zeigt. Wir definieren zudem die folgenden hermiteschen Spin-Operatoren:

$$S_x = \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|), \quad S_y = \frac{\hbar}{2}(-i|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + i|\downarrow\rangle\langle\uparrow|), \quad S_z = \frac{\hbar}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|) \tag{2}$$

Wie Sie sehen, sind $\{|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle\}$ Eigenfunktionen von S_z. Weiters befinde sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

$$|\psi(t = 0)\rangle = |\psi\rangle = |\uparrow\rangle$$

a) Direkt zum Zeitpunkt $t = 0$ wird nun S_y gemessen. Wie lauten die zwei möglichen Messwerte und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten? Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle\psi|S_y|\psi\rangle$.

b) Nach der Messung von S_y zum Zeitpunkt $t = 0$ wird zum Zeitpunkt $t = t^* > 0$ abermals die Observable S_y gemessen. Bestimmen Sie die zugehörigen Messwerte für diese Messung und berechnen Sie die bedingten Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Messergebnis bei a). Welche absoluten Wahrscheinlichkeiten ergeben sich für die zwei Messwerte?

c) In einem zweiten, unabhängigen Versuchsaufbau wird zum Zeitpunkt $t = 0$ stattdessen die Energie gemessen. Wie lauten die möglichen Messwerte und zugehörigen Wahrscheinlichkeiten für diese Messung?

d) Nach der Messung der Energie zum Zeitpunkt $t = 0$ wird zum Zeitpunkt $t = t^* > 0$ abermals die Energie gemessen. Bestimmen Sie die zugehörigen Messwerte für diese Messung und berechnen Sie die bedingten und absoluten Messwahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit vom Ergebnis in c). Was fällt Ihnen auf?

15. Scharfe Messung *1 Punkte*

a) An einem System im Zustand $|\psi\rangle$ wird die Observable A mit der Unschärfe $\Delta A = 0$ gemessen. Beweisen Sie, dass $|\psi\rangle$ dann notwendigerweise ein Eigenzustand $|a\rangle$ von A sein muss.

16. Impulsdarstellung der Schrödinger Gleichung *2+1+1=4 Punkte*

Betrachten Sie ein 1-dimensionales Problem, bei dem sich ein Teilchen der Masse m in einem Potential $V(x) = -Fx$ befindet (Beispiel: geladenes Teilchen in konstantem elektrischen Feld).

a) Man schreibe die Schrödinger Gleichung für dieses Problem in der Impulsdarstellung und leite eine Relation zwischen $\frac{\partial}{\partial t}|\langle p|\psi(t)\rangle|^2$ und $\frac{\partial}{\partial p}|\langle p|\psi(t)\rangle|^2$ her. Welche Form haben Wellenfunktionen $\psi(p,t) = \langle p|\psi(t)\rangle$, die diese Differentialgleichung erfüllen? Geben Sie eine physikalische Interpretation.

b) Man berechne die zeitabhängigen Energieeigenzustände $\psi_E(p,t)$ des Problems für eine gegebene Energie E. Handelt es sich um gebundene oder um Kontinuumszustände? Im ersten Fall normieren Sie die Zustände gemäss der L^2-Norm, andernfalls sichern Sie die Orthonormiertheit der Zustände via $\langle\psi_{E_1}|\psi_{E_2}\rangle = \delta(E_1 - E_2)$. Warum war es vorteilhaft, dieses Problem in der Impulsdarstellung anzugehen?

c) Wie können Sie aus dieser Lösung im Impulsraum die Wellenfunktion in der Ortsdarstellung berechnen? Das auftretende Integral ist eine Airy Funktion und muss hier nicht explizit berechnet werden. In Abbildung 1 sehen Sie $\psi_E(x)$ für $E = 0$ und $F > 0$. Erklären Sie das Verhalten der Wellenfunktion für $x < 0$ und $x > 0$.

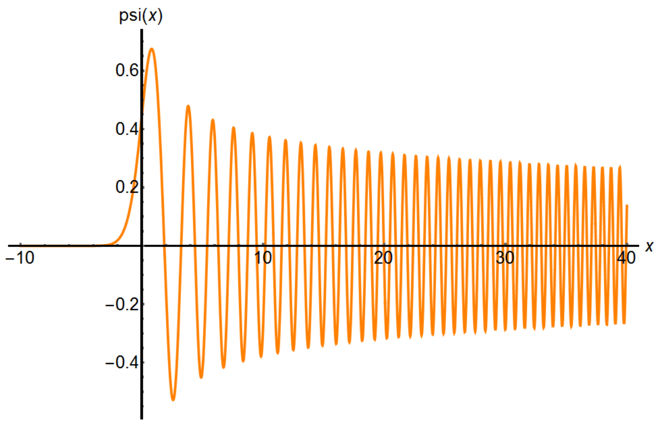

Abbildung 1: Wellenfunktion $\psi_E(x)$ für $E = 0$ und $m = \hbar = F = 1$.

Hinweis: Auch wenn dies die formelle Lösung ist, ist zu bedenken, dass der gegebene Hamilton Operator nicht nach unten beschränkt ist. Physikalisch kann das Elektron in diesem Potential beliebig viel Energie abgeben. In der realen Welt ist das elektrische Feld natürlich örtlich begrenzt und die gefundene Lösung eine (gute) Näherung für diesen Bereich.