Aufgabenblatt 2

5 Dirac-Notation und Hilberträume

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle\psi|\phi\rangle$ mit

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{N} z_i |e_i\rangle\ , \qquad |\phi\rangle = \sum_{i=1}^{N} w_i |e_i\rangle\ , \qquad z_i, w_i \in \mathbb{C}\ , \tag{1}$$

wobei $\{|e_1\rangle, ..., |e_N\rangle\}$ eine Orthonormalbasis im Hilbertraum $\mathcal{H}_N$ bildet.

b) Zeigen Sie, dass der Einheitsoperator in $\mathcal{H}_N$ durch

$$I = \sum_{i=1}^{N} |e_i\rangle\langle e_i| \tag{2}$$

gegeben ist, indem sie I auf einen beliebigen Vektor $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_N$ anwenden.

c) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle\psi|\phi\rangle$ mit

$$|\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r\ f(\boldsymbol{r})\ |e_{\boldsymbol{r}}\rangle\ , \quad |\phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{d}^3 r\ g(\boldsymbol{r})\ |e_{\boldsymbol{r}}\rangle\ , \qquad f, g \in L^2\ . \tag{3}$$

wobei $\{|e_{\boldsymbol{r}}\rangle,\ \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^3\}$ eine Orthonormalbasis im unendlich-dimensionalen Hilbertraums bildet.

d) Wir betrachten ebene Wellen $|\varphi_{\boldsymbol{p}}\rangle$ für die gilt

$$\langle e_{\boldsymbol{r}}|\varphi_{\boldsymbol{p}}\rangle = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{p}\boldsymbol{r}}\ . \tag{4}$$

Die Menge $\{|\varphi_{\boldsymbol{p}}\rangle,\ \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3\}$ bildet ebenfalls eine Basis in $\mathcal{H}$. Zeigen Sie, dass diese Basisvektoren orthonormiert sind.

(ab)+(cd) = 2 Kreuze

6 Unitäre Operatoren im N-dim. Hilbertraum $\mathcal{H}_N$

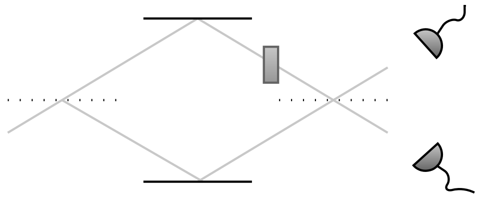
a) Wir betrachten einen unitären Operator U in $\mathcal{H}_N$ und die Orthonormalbasis $\{|e_1\rangle, ..., |e_N\rangle\}$, sodass wir in dieser Basis die Matrixelemente als $u_{ij} = \langle e_i|U|e_j\rangle$ schreiben können. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sum_{k=1}^{N} u_{ki}^* u_{kj} = \delta_{ij}\ . \tag{5}$$

b) Wir betrachten zwei Vektoren $|\psi\rangle$ und $|\phi\rangle = U|\psi\rangle$ aus $\mathcal{H}_N$, wobei U eine unitärer Operator ist. Zeigen Sie, dass gilt $\big\||\phi\rangle\big\| = \big\||\psi\rangle\big\|$.

1 Kreuz

7 Interferenz eines einzelnen Photons



Die Quantenphysik eines Interferrometers für Photonen lässt sich im zweidimensionale Hilbertraum mit den Basisvektoren $|a\rangle$ und $|b\rangle$ modellieren. Es gilt $\langle a|b\rangle = 0$ und $\langle a|a\rangle = \langle b|b\rangle = 1$. Das Interferrometer besteht aus zwei Beamsplittern (gestrichelte Linie), zwei Spiegeln (durchgezogene Linie), einem Kristall (grauer Block) und zwei Photonen-Detektoren. Dieses Modell beschreibt lediglich einen sinplen Freiheitsgrad eines einzelnen Photons: ob es oberhalb ($a \equiv$ above) oder unterhalbt ($b \equiv$ below) der Beamsplitter zu detektieren ist. Da sich die Photonenquelle unterhalb befindet, wird der Zustand des Photons zu Beginn mit $|\psi_\mathrm{i}\rangle = |b\rangle$ beschrieben (i steht für initial). Die Entwicklung des Photonzustandes im Interferometer wird durch die Formel

$$|\psi_\mathrm{f}\rangle = U_\mathrm{BS} U_\mathrm{K} U_\mathrm{BS} |\psi_\mathrm{i}\rangle \ , \tag{6}$$

beschrieben (f steht für final), wobei die Entwicklung durch den Beamsplitters (BS) und durch den Kristall (K) mit den unitären Operatoren

$$U_\mathrm{K} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b| \tag{7}$$

$$U_\mathrm{BS} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|a\rangle\langle a| + |a\rangle\langle b| - |b\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\Big) \tag{8}$$

gegeben ist.

a) Die Wahrscheinlichkeit, das Photon nach seinem Flug durch das Interferrometer oberhalb oder unterhalb zu detektieren ist durch

$$p_a = |\langle a|\psi_\mathrm{f}\rangle|^2 \quad \text{und} \quad p_b = |\langle b|\psi_\mathrm{f}\rangle|^2 \ , \tag{9}$$

gegeben. Berechnen Sie beide Wahrscheinlichkeiten.

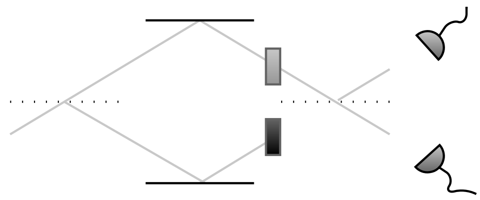
b) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit das Photon (i) immer unterhalb detektiert wird oder (ii) in beiden Detektoren mit gleicher Wahrscheinlichkeit detektiert wird?

c) Berechnen Sie den Interferenzkontrast (interference visibility) des Interferrometers über

$$\mathcal{V} = \max_\varphi \frac{p_a - p_b}{p_a + p_b} \ . \tag{10}$$

Bei $\mathcal{V} = 0$ ist keine Interferenz vorhanden. Der höchste Wert, $\mathcal{V} = 1$, entspricht der optimalsten Interferenz.

d) Wir blockieren nun den unteren Pfad des Interferrometers mit einem lichtundurchlässigen Kristall. Jedes detektierte Photon muss nun also den oberen Weg genommen haben.



Beide Kristalle werden gemeinsam durch die Matrix

$$U'_{\mathrm{K}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}|a\rangle\langle a| \tag{11}$$

beschrieben. Es gilt nun

$$|\psi_{\mathrm{f}}\rangle = U_{\mathrm{BS}}U'_{\mathrm{K}}U_{\mathrm{BS}}|\psi_{\mathrm{i}}\rangle\ , \tag{12}$$

Berechnen Sie erneut die Wahrscheinlichkeiten p_a, p_b wie in Teilaufgabe a) und den Interferenzkontrast $\mathcal{V}$ wie in c). Ist es wiederum möglich, dass das Photon bei jeder Durchführung nur im unteren Detektor gemessen wird?

(ab)+(cd) = 2 Kreuze