Aufgabenblatt 5

Für dieses Blatt haben Sie 3 Wochen Zeit. Deadline für die Kreuzer ist am 28.11.19 um 23:59 Uhr.

15 Zerfall eines Quantenzustandes

Die Wahrscheinlichkeit $p(t)$ einen bei $t = 0$ gemessenen Quantenzustand $|\psi\rangle$ nach einer Zeit t erneut zu messen ist gegeben durch

$$p(t) = |\langle\psi|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht}|\psi\rangle|^2 \,. \tag{1}$$

a) Leiten Sie die gegebene Formel für $p(t)$ aus den Axiomen der Quantenmechanik ab. Was hat $p(t)$ mit der Zerfallswahrscheinlichkeit des Quantenzustandes $|\psi\rangle$ zu tun?

b) Berechnen Sie $p(t)$ unter der Annahme, dass $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von H ist. Was sagt das Ergebnis über den Zerfall von Eigenzuständen aus?

c) Berechnen Sie eine Taylorreihe von Gleichung (1) um $t = 0$ bis zur quadratischen Ordnung. Ergebnis:

$$p(t) = 1 - \left(\frac{\Delta H_\psi}{\hbar}\right)^2 \cdot t^2 + \mathcal{O}(t^3) \tag{2}$$

d) Der *Quanten-Zeno-Effekt*: Angenommen, ein Quantensystem befindet sich zum Zeitpunk $t_0 = 0$ im Zustand $|\psi\rangle$. Es wird zu den Zeitpunkten $t_n = t_{n-1} + \Delta t$ gemessen, ob es sich noch im Zustand $|\psi\rangle$ befindet, wobei $\Delta t \ll \hbar/\Delta H_\psi$. Berechnen sie für jeden Zeitpunkt t_n näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, ob sich das System noch immer im Zustand $|\psi\rangle$ befindet.

1 Kreuz

16 Zeitentwicklung kohärenter Zustände

Wir betrachten wieder kohärente Zustände im harmonischen Oszillator:

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{3}$$

mit $\alpha \in \mathbb{C}$. Hierbei sind $|n\rangle$ die Eigenzustände des harmonischen Oszillators.

a) Berechnen Sie das Skalarprodukt zweier kohärenter Zustände: $\langle\alpha|\beta\rangle$.

b) Berechnen Sie die Zeitentwicklung eines kohärenten Zustandes,

$$|\psi_t\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht}|\alpha\rangle \tag{4}$$

und zeigen Sie, dass $|\psi_t\rangle$ für alle t selbst wieder ein kohärenter Zustand ist.

c) Berechnen Sie den Zerfall (und Wiederauferstehung) eines kohärenten Zustandes, d.h. berechnen Sie

$$p(t) = |\langle\alpha|\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht}|\alpha\rangle|^2 \ . \tag{5}$$

d) Berechenen Sie die zeitliche Entwicklung des Erwartungswertes des Ortsoperators, wenn sich das System in einem kohärenten Zustand befindet.

1 Kreuz

17 Statistik von Observablen

Der Erwartungswert $\langle A\rangle_\psi$ und die Standardabweichung ΔA_ψ einer Observable A in einem Zustand $|\psi\rangle$ sind gegeben durch:

$$\langle A\rangle_\psi := \langle\psi|A|\psi\rangle \ , \qquad \Delta A_\psi := \sqrt{\left\langle \ (A - \langle A\rangle_\psi)^2 \ \right\rangle_\psi} \ . \tag{6}$$

a) Zeigen Sie, dass ΔA_ψ auch in folgender Form geschrieben werden kann

$$\Delta A_\psi = \sqrt{\langle A^2\rangle_\psi - \langle A\rangle_\psi^2} \tag{7}$$

b) Berechnen Sie Erwartungswert und Standardabweichung der Observable A für den Fall, dass $|\psi\rangle$ ein Eigenzustand von A ist.

c) Leiten Sie die *Unschärferelation* beliebiger Observablen A und B ab,

$$\Delta A_\psi \Delta B_\psi \geq \frac{1}{2}\left| \ \left\langle [A,B]\right\rangle_\psi \right| \ , \tag{8}$$

und betrachten Sie den Fall $A = X$ und $B = P$.

d) Berechnen Sie sowohl ΔX_ψ und ΔP_ψ, als auch $\Delta X_\psi \Delta P_\psi$ für den Fall, dass $|\psi\rangle = |\alpha\rangle$ ein kohärenter Zustand des harmonischen Oszillators ist (siehe Gleichung (3) auf diesem Blatt). Interpretieren Sie das Ergebnis.

(ab)+(cd) = 2 Kreuze

18 Streuung

a) Erklären Sie durch den Zeitentwicklungsoperator (zeitabhängigen Schrödingergleichung), warum man üblicherweise davon spricht, dass eine eindimensionale ebene Welle $\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ nach rechts und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}$ nach links propagiert, vorausgesetzt das Potential ist konstant, $V(x) = \text{const.}$, und $k \in \mathbb{R}$.

b) Berechnen Sie die Matrixelemente M_{21} und M_{11} der Transfermatrix M aus der Vorlesung explizit für den Fall $E < V_0$.

c) Bestimmen Sie für diesen Fall den Reflexionskoeffizienten R und Transmissionskoeffizienten T explizit und zeigen Sie, dass $T + R = 1$ gilt.

1 Kreuz