Aufgabenblatt 6

19 Ehrenfest-Theorem

Wir betrachten einen allgemeines eindimensionales Problem mit dem Hamiltonian

$$H = \frac{P^2}{2m} + V(X) \ , \tag{1}$$

wobei P und X der Impuls- und Ortsoperator sind und $V(X)$ ein allgemeines ortsabhängiges Potential.

a) Zeigen Sie, dass die Zeitentwicklung des Erwartungswertes des Impulsoperators in einem beliebigen Zustand $|\psi_t\rangle$ durch folgende Gleichung gegeben ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P\rangle_{\psi_t} = \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\big\langle\, [V(X), P]\,\big\rangle_{\psi_t} \tag{2}$$

b) Zeigen Sie, dass für ein Potential $V(X) = aX^n$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \geq 1$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\langle P\rangle_{\psi_t} = -an\langle X^{n-1}\rangle_{\psi_t} \ . \tag{3}$$

Bleiben Sie dabei in der abstrakten Dirac-Notation (d.h. ohne Verwendung der Ortsdarstellung der Operatoren).

c) Interpretieren Sie Gleichung (3) für die Spezialfälle $n = 1, 2$ mit $a > 0$. Geben Sie für den Fall $n = 1$ die explizite Lösung für $\langle P\rangle_{\psi_t}$ an.

(a)+(bc) = 2 Kreuze

20 Translation und Rotation

a) Wir betrachten den Operator

$$T_a = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}aP} \qquad \text{wobei} \qquad P = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial x} \tag{4}$$

der eindimensionale Impulsoperator ist und $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter. Zeigen sie, dass die Wirkung von T_a auf eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben ist durch

$$T_a f(x) = f(x-a) \ . \tag{5}$$

b) Wir betrachten den Operator

$$U(\alpha, \boldsymbol{n}) = \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\alpha\boldsymbol{n}\boldsymbol{L}} \qquad \text{wobei} \qquad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{X}\times\boldsymbol{P} = -\mathrm{i}\hbar\begin{pmatrix} y\frac{\partial}{\partial z} - z\frac{\partial}{\partial y} \\ z\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial z} \\ x\frac{\partial}{\partial y} - y\frac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix} \tag{6}$$

der dreidimensionale Bahndrehimpulsoperator ist, $\boldsymbol{n}$ ein Einheitsvektor und $\alpha \in \mathbb{R}$ ein Parameter.

Wir beschränken uns hier auf den Fall $\boldsymbol{n} = (0,0,1)^T$.

(i) Zeigen Sie, dass in Kugelkoordinaten $(x, y, z) \to (r, \theta, \varphi)$ gilt,

$$\boldsymbol{nL} = -\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{7}$$

(ii) Zeigen Sie, dass die Wirkung von $U(\varphi, \boldsymbol{n})$ auf eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ durch eine Drehung um die z-Achse gegeben ist

$$U(\varphi, \boldsymbol{n})f(r, \theta, \varphi) = f(r, \theta, \varphi - \alpha)\ . \tag{8}$$

Dabei können Sie auch Ihr Wissen aus Teilaufgabe (a) anwenden.

(a)+(b) = 2 Kreuze

21 Spur und Dichteoperator

a) Die Spur (tr) einer Matrix A ist gegeben durch

$$\mathrm{tr}[A] = \sum_i \langle e_i|A|e_i\rangle\ , \tag{9}$$

wobei die $|e_i\rangle$ eine Orthogonalbasis bilden. Zeigen Sie, dass $\mathrm{tr}[A]$ undabhängig von der Wahl der Basis ist.

b) Zeigen Sie

(i) $\mathrm{tr}\big[\,|\phi\rangle\langle\chi|\,\big] = \langle\chi|\phi\rangle$

(ii) $\mathrm{tr}\big[AB\big] = \mathrm{tr}\big[BA\big]$ auch wenn $[A, B] \neq 0$.

(iii) $\mathrm{tr}\big[\rho A\big] = \langle\psi|A|\psi\rangle$ mit dem Dichteoperator $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

1 Kreuz