Aufgabenblatt 7

22 Kugelflächenfunktionen

a) Die Kugelflächenfunktionen erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; Y^*_{lm}(\theta,\varphi) Y_{l'm'}(\theta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \; . \tag{1}$$

Diese zu beweisen ist allerdings sehr mühsam. Wir beschränken uns daher auf den "m-Teil", der aus der Integration über φ folgt: Setzen Sie einen geeigneten Ausdruck für $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ ein und zeigen Sie, dass aus der φ-Integration das $\delta_{mm'}$ folgt.

b) Berechnen Sie explizit (d.h. ohne Ausnutzung der Orthogonalitätsrelation)

$$\int_0^\pi \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; Y^*_{21}(\theta,\varphi) Y_{11}(\theta,\varphi) \tag{2}$$

c) Wir betrachten eine quadratintegrable Funktion

$$f(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} a_{lm}(r) \; Y_{lm}(\theta,\varphi) \; , \tag{3}$$

die nach Kugelflächenfunktionen entwickelt ist. Zeigen Sie, dass für die Entwicklungskoeffizienten $a_{LM}(r)$ gilt

$$a_{LM}(r) = \int_0^\pi \mathrm{d}\theta \, \sin\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \; f(\boldsymbol{r}) \; Y^*_{LM}(\theta,\varphi) \; . \tag{4}$$

d) Entwickeln Sie die Funktion

$$f(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{1}{128\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)} (\sqrt{2}z + x - \mathrm{i}y) \tag{5}$$

nach Kugelflächenfunktionen. Beschränken Sie sich dabei auf $0 < l \leq 2$. Ist diese Entwicklung exakt?

(a)+(bc)+(d) = 3 Kreuze

23 Elektron im Magnetfeld

Wir betrachten ein Elektron (ohne Spin), dass sich in einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)^T$ befindet.

a) Begründen Sie, warum der Hamiltonoperator für diesen Fall die Form

$$H = \frac{1}{2m}(\boldsymbol{P} + e\boldsymbol{A})^2 \; , \tag{6}$$

annimmt, mit der Elektronenladung e, dem Vektorpotential $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{B}/2$, und dem dreidimensionalem Ortsoperator $\boldsymbol{X} = (X, Y, Z)^T$.

b) Zeigen Sie, dass dieser Hamiltonoperator ebenso geschrieben werden kann als

$$H = \frac{\boldsymbol{P}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 X^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 Y^2 + \omega L_z \; . \tag{7}$$

wobei L_z der Drehimpulsoperator in z-Richtung ist. Interpretieren Sie das Ergebnis.

1 Kreuz

24 Delta-Potential

Wir betrachten ein eindimensionales Teilchen im Potential $V(x) = -V_0\delta(x)$ mit $V_0 > 0$, wobei $\delta(x)$ die Diracsche Deltafunktion ist.

a) Schreiben Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für dieses Potential auf.

b) Leiten Sie folgende Gleichungen für die Eigenzustände ψ des Hamiltonians her

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}(x) = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}y \, \big(E - V(y)\big)\, \psi(y) = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{x}^{\infty} \mathrm{d}y \, \big(E - V(y)\big)\, \psi(y) \; . \tag{8}$$

c) Hat die erste Ableitung der Wellenfunktion einen Sprung bei $x = 0$? Berechnen Sie dazu

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}(-x) - \frac{\partial\psi}{\partial x}(+x)\right] \; . \tag{9}$$

d) Wieviele gebundene Zustände gibt es in diesem Potential? Berechnen Sie die dazugehörige Energie und Wellenfunktion.

1 Kreuz