# Aufgabenblatt 8

Für dieses Blatt haben Sie 4 Wochen Zeit. Deadline für die Kreuzer ist am 09.01.20 um 23:59 Uhr.

## 25 Elektron in einem Fulleren

a) Schreiben Sie den Laplace-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ in Kugelkoordinaten auf.

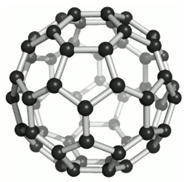
b) Wir betrachten ein freies Teilchen der Masse $m$, dass auf der Oberfläche einer Kugel mit Radius $r_0$ lebt. Die Freiheitsgrade sind $\theta$ und $\varphi$, wobei $r = r_0$ fixiert ist. Leiten Sie ab, dass der Hamiltonian über den Drehimpulsoperator $\boldsymbol{L}$ gegeben ist:

$$H = \frac{1}{2mr_0^2}\boldsymbol{L}^2 \ . \tag{1}$$

c) Geben Sie die Eigenfunktionen $\psi_{lm}(\theta, \varphi)$ und Eigenwerte $E_l$ des Hamiltonians an.

d) Die Valenzelektronen in einem C60 Fulleren lassen sich näherungsweise durch nichtwechselwirkende Elektronen auf einer Kugeloberfläche modellieren. Dies entspricht genau dem Hamiltonian aus Gl. (1) mit $r_0 = 3.5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Da die äußeren Valenzelektronen die Zustände mit $l = 4$ vollständig und mit $l = 5$ nur teilweise besetzen, ist die niedrigste Anregungsenergie durch $E_5 - E_4$ gegeben. Vergleichen Sie das mit der experimentell gemessenen Anregungsenergie von $3.07\,\mathrm{eV}$.

(ab)+(cd)=2 Kreuze



## 26 Elektron im Magnetfeld: Landau Level

Wir betrachten wieder die gleiche Situation wie in Aufgabe 22 und schreiben den Hamiltonian eines spinlosen Elektrons in einem Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)^T$ als

$$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{\pi}^2 \ , \tag{2}$$

wobei $\boldsymbol{\pi} = (\pi_x, \pi_y, \pi_z)^T = \boldsymbol{P} + e\boldsymbol{A}$. Hier ist $\boldsymbol{P}$ der kanonische Impuls und das Vektorpotential in der symmetrischen Eichung $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{X} \times \boldsymbol{B}/2$.

a) Wir führen den Operator

$$a = \frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}}(\pi_x - \mathrm{i}\pi_y) \tag{3}$$

ein. Zeigen Sie, dass damit der Hamiltonian geschrieben werden kann als

$$H = \hbar\omega_B \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \frac{P_z^2}{2m} \ , \tag{4}$$

wobei $\omega_B = eB/m$ die sogenannte Zyklotronfrequenz ist. Beachten Sie, dass $\omega_B$ nicht gleich $\omega$ aus Aufgabe 22 ist (genauer gesagt $\omega_B = 2\omega$).

b) Beweisen Sie die Kommutatorrelation $[\pi_x, \pi_y] = -\mathrm{i}e\hbar B$.

c) Zeigen Sie, dass die Eigenwerte des Operators $N = a^\dagger a$ reell und positiv sind, d.h. zeigen Sie, dass $N$ hermitesch und positiv ist. Ein Operator $N$ ist positiv, wenn $\langle\psi|N|\psi\rangle \geq 0$ für beliebige $|\psi\rangle$.

d) Beweisen Sie die Kommutatorrelation $[a, a^\dagger] = 1$ und zeigen Sie, dass $a|n\rangle$ und $a^\dagger|n\rangle$ Eigenzustände von $N$ sind, wenn $|n\rangle$ die Eigenzustände von $N$ mit Eigenwerten $n > 0$ sind:

$$N \left[a|n\rangle\right] = (n-1) \left[a|n\rangle\right] \ , \qquad N \left[a^\dagger|n\rangle\right] = (n+1) \left[a^\dagger|n\rangle\right] \tag{5}$$

e) Zeigen Sie, dass es ein minimales $n_{\text{min}}$ mit $a|n_{\text{min}}\rangle = 0$ geben muss und es durch $n_{\text{min}} = 0$ gegeben ist. Erklären Sie, warum daraus folgt, dass die Eigenwerte von $N$ ganzzahlig sind, $n = 0, 1, 2, ...$ .

f) Beweisen Sie $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ und $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

g) Wir beschränken uns nun auf die Physik in der $xy$-Ebene und ignorieren im Hamiltonian (4) den kinetischen Anteil in $z$-Richtung, d.h. wir betrachten ab jetzt nur noch $H = \hbar\omega_B\,(N + 1/2)$. Geben Sie Eigenenergien $E_n$ des Hamiltonoperators in Abhängigkeit des Magnetfeldes $B$ an.

h) Zeigen Sie, dass der Grundzustand in Ortsdarstellung $\psi_0(x,y) = \langle x, y|0\rangle$ folgende Differentialgleichung erfüllt:

$$\frac{1}{\sqrt{2e\hbar B}} \left[ -\mathrm{i}\hbar \left( \frac{\partial}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{eB}{2}\,(-y - \mathrm{i}x) \right] \psi_0(x,y) = 0 \ . \tag{6}$$

i) Zeigen Sie, dass die Funktion in Gl. (7) mit der Normierungskonstante $\alpha$ und der magnetischen Länge $l_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ die Differentialgleichung (6) für beliebige $m = 0, 1, 2, ...$ erfüllt. Was sagt das über die Entartung des Grundzustands?

$$\psi_{0,m}(x,y) = \alpha \left( \frac{x - \mathrm{i}y}{l_B} \right)^m \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/4l_B^2} \tag{7}$$

j) Die Energie-Quantenzahl $n$ reicht also noch nicht aus, um den Grundzustand eindeutig zu beschreiben. Welchen Operator können wir noch hinzuziehen, um gemeinsam mit $H$ einen vollstandigen Satz kommutierender Observable zu erhalten?

k) Berechnen Sie die den ersten angeregten Zustand mit $m = 0$, d.h. berechnen Sie $\psi_{n,m}(x,y)$ mit $n = 1$ und $m = 0$.

(ab)+(cdefg)+(hijk)=3 Kreuze