Aufgabenblatt 9

27 Wasserstoffatom

Wir betrachten den Grundzustand eines Elektrons im Wasserstoffatom.

a) Schreiben Sie den Hamiltonoperator H des Elektrons im Wasserstoffatom auf und zeigen Sie durch Einsetzen, dass die Wellenfunktion $\psi_{nlm}(\boldsymbol{r})$ mit $n = 1$, $l = 0$, $m = 0$ ein Eigenzustand von H mit Eigenenergie $-\frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2}$ ist.

$$\psi_{100}(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}}\, \mathrm{e}^{-\frac{r}{a_0}} , \qquad a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} . \tag{1}$$

b) Berechnen Sie die Größen

$$A(R) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta\, |\psi_{100}(R,\theta,\varphi)|^2 \tag{2}$$

$$B(R) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \int_0^{R} \mathrm{d}r\; r^2\, |\psi_{100}(r,\theta,\varphi)|^2 \tag{3}$$

$$C = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \sin\theta \int_0^{\infty} \mathrm{d}r\; r^3\, |\psi_{100}(r,\theta,\varphi)|^2 \tag{4}$$

Skizzieren Sie $A(R)$ und $B(R)$. Geben Sie die physikalische Bedeutung aller drei Größen an.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit das Elektron (i) im Atomkern, (ii) höchstens mit dem Abstand a_0 vom Atomkern entfernt, (iii) mindestens einen Millimeter vom Atomkern entfern zu messen? Nehmen Sie dabei einen Protonenradius von $R = 1.6 \cdot 10^{-5} a_0$ an.

1 Kreuz

28 Der Spin

a) Beweisen Sie durch Nachrechnen: (i) $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$, (ii) $\mathrm{tr}[\sigma_i] = 0$, (iii) $[\sigma_i, \sigma_j] = 2\mathrm{i}\varepsilon_{ijk}\sigma_k$.

b) Drücken Sie die Eigenvektoren von S_y durch die Eigenvektoren $|+\rangle, |-\rangle$ von S_z aus.

c) Berechnen Sie die 2×2 Matrix der Leiteroperatoren S_+ und S_-.

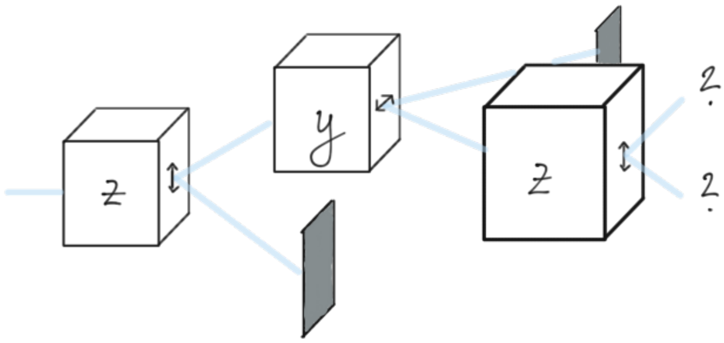
d) Beweisen Sie: $\mathrm{tr}[\rho] = 1$ mit $\rho = (\mathbb{1} + \boldsymbol{n}\boldsymbol{\sigma})/2$ und $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)^T$, $|\boldsymbol{n}| \leq 1$.

1 Kreuz

29 Stern-Gerlach-Experiment

Wir betrachten ein Stern-Gerlach-Experiment mit drei hintereinander liegenden Magnetfeldern. Das erste Magnetfeld ist in z-, das zweite in y-, und das dritte wieder in z-Richtung orientiert. Nach dem ersten und zweiten Magnetfeld wird jeweils nur ein Strahl durch das nächste Magnetfeld geleitet. Überlegen Sie, ob sich der Strahl im dritten Magnetfeld erneut aufspaltet. Beschränken Sie sich dabei allein auf den Spinfreiheitsgrad (zweidimensionaler Hilbertraum, keine ortsabhängige Wellenfunktionen).

1 Kreuz



Jede Box stellt eine Stern-Gerlach Apparatur dar.
Die grauen Platten blockieren den Strahl.

30 Addition von Spins

Wir betrachten zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Freiheitsgrade (z.B. zweier Elektronen). Die Orthonormalbasis $\{|s_1, m_1, s_2, m_2\rangle \mid s_1 = s_2 = \frac{1}{2},\, m_1, m_2 = \pm\frac{1}{2}\}$ des vierdimensionalen Hilbertraums schreiben wir abgekürzt als

$$|++\rangle = \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle , \quad |+-\rangle = \left|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle , \tag{5}$$

$$|-+\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right\rangle , \quad |--\rangle = \left|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\rangle . \tag{6}$$

Hierbei gilt $S_{i,z}|\pm\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\pm\rangle$ und $\boldsymbol{S}_i^2|\pm\pm\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|\pm\pm\rangle$, $i = 1, 2$.

a) Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle\pm\pm|S_x|\pm\pm\rangle$ und $\langle\pm\pm|S_z|\pm\pm\rangle$, wobei $S_x = S_{1,x} + S_{2,x}$ und $S_z = S_{1,z} + S_{2,z}$ der Gesamtspin in x- und z-Richtung sind. Das Ergebnis für S_z finden Sie in den Vorlesungsnotizen.

b) Drücken Sie den Operator $\boldsymbol{S}^2$ mittels $\boldsymbol{S}_i^2$, $S_{i,z}$ und $S_{i,\pm}$ aus, $i = 1, 2$. Hier ist $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ der Gesamtspin. Das Ergebnis finden Sie in den Vorlesungsnotizen.

c) Berechnen Sie die Matrixelemente $\langle\pm\pm|\boldsymbol{S}^2|\pm\pm\rangle$. Das Ergebnis finden Sie in den Vorlesungsnotizen.

d) Welche Ergebnisse kann eine Messung von $\boldsymbol{S}^2$ liefern? In welchem Zustand befindet sich das System nach der Messung? Gibt es Entartung?

1 Kreuz

31 Reine und gemischt Zustände

Reine und gemischte Zustände lassen sich über Dichteoperatoren definieren (siehe Aufgabe 21). Ein Dichteoperator ρ, der als $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ geschrieben werden kann, wird *reiner Zustand* genannt. In jedem anderen Fall spricht man von einem *gemischten Zustand*.

a) Wir betrachten einen zweidimenaionalen Hilbertraum mit Orthonormalbasis $\{|a\rangle, |b\rangle\}$. Bestimmen Sie, ob die folgenden Dichteoperatoren reine oder gemischte Zustände darstellen und berechnen sie jeweils die Spur $\mathrm{tr}[\rho]$.

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\big(|a\rangle\langle a| - |b\rangle\langle a| - |a\rangle\langle b| + |b\rangle\langle b|\big) \tag{7}$$

$$\rho_2 = \frac{1}{2}\big(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\big) \tag{8}$$

b) Beweisen Sie: $\mathrm{tr}\ [\rho^2] \neq 1 \ \Rightarrow\ \rho$ ist ein gemischter Zustand.

c) Wir betrachten erneut einen Beamsplitter wie in Aufgabe 7, wobei $|a\rangle$ und $|b\rangle$ wieder für above und below stehen. Formal wirkt der Beamsplitter über den unitären Operator

$$U_{\mathrm{BS}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|a\rangle\langle a| + |a\rangle\langle b| - |b\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\Big) \tag{9}$$

wobei Dichteoperatoren über $\rho \to U_{\mathrm{BS}}\,\rho\,U_{\mathrm{BS}}^\dagger$ transfomiert werden. Berechnen Sie den Dichteoperator nach dem Beamsplitter, wenn er davor durch

$$\text{(i)} \quad \rho_1 = |\psi\rangle\langle\psi|\,, \qquad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle + |b\rangle) \tag{10}$$

$$\text{(ii)} \quad \rho_2 = \frac{1}{2}\big(|a\rangle\langle a| + |b\rangle\langle b|\big) \tag{11}$$

gegeben ist. In welchem der beiden Fälle findet Interferenz im Beamsplitter statt?

1 Kreuz