Nachtest Quantentheorie I,
Freitag, 19.06.2020

Name: **Matrikelnummer:**

B1	B2	B3	Σ
16	18	16	50

WICHTIG: Bitte schreiben Sie die Matrikelnummer **deutlich**, da diese dazu dienen wird, Ihnen Ihre Punkte individuell zu übermitteln.

Viel Erfolg!

Beispiel **1)**: **Harmonischer Oszillator** 4+4+4+4=16 Punkte

Wir betrachten den harmonischen Oszillator mit Kreisfrequenz ω, indem sich ein Teilchen der Masse m befindet (eindimensionales Problem).

a) Schreiben Sie das Oszillatorpotential $V(X)$ und den Hamiltonoperator $H(P, X)$ an. Zeichnen Sie in einer Skizze die drei niedrigsten Eigenenergien E_n, sowie die dazugehörigen Wellenfunktionen der stationären Zustände $\Psi_n(x)$ in das Potential ein. Geben Sie die entsprechenden Werte von E_n explizit an.

b) Betrachten Sie die Leiteroperatoren a und $a^\dagger$, gegeben durch

$$a = \frac{m\omega X + \mathrm{i}P}{\sqrt{2m\omega\hbar}} \quad \text{und} \quad a^\dagger = \frac{m\omega X - \mathrm{i}P}{\sqrt{2m\omega\hbar}}. \tag{1}$$

Formen Sie den Hamiltonoperator so um, dass er sich durch a und $a^\dagger$ darstellen lässt. Berechnen Sie explizit den Kommutator $[a, a^\dagger]$. Zur Berechnung von $[a, a^\dagger]$ darf das Ergebnis des Kommutators von Orts- und Impulsoperator $[X, P]$ verwendet werden.

c) Drücken Sie den Ortsoperator durch die Leiteroperatoren a und $a^\dagger$ aus. Berechnen Sie nun die Energiekorrektur in erster Ordnung Störungstheorie $\epsilon_n^{(1)} = \langle n|W|n\rangle$ für eine quadratische Störung $W = \lambda X^2$ wobei λ ein gegebenes Skalar ist.

d) Berechnen Sie nun die Energiekorrektur in erster Ordnung Störungstheorie $\epsilon_n^{(1)} = \langle n|W|n\rangle$ für eine Störung $W = \lambda X^3$.

Beispiel **2)**: **Addition von Spins** 6+6+4+2=18 Punkte

Wir betrachten zwei Spin-$\frac{1}{2}$ Teilchen in der Orthonormalbasis der vier Kombinationsmöglichkeiten up-up, down-up, up-down und down-down:

$$|\pm\pm\rangle = \big(|++\rangle, |-+\rangle, |+-\rangle, |--\rangle\big). \tag{2}$$

a) Die Spin-Operatoren in z-Richtung des ersten bzw. zweiten Teilchens sind als 4×4 Matrix der Basis aus Gleichung (2) geschrieben

$$S_{1,z} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad S_{2,z} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Finden Sie die Matrixelemente der Spin-Operatoren $S_{1,x}, S_{2,x}, S_{1,y}$ und $S_{2,y}$ und geben Sie alle in der Basis aus Gleichung (2) in Form einer 4×4 Matrix an.

b) Addieren Sie die Spin-Operatoren zu den Gesamtspin-Operatoren $S_x = S_{1,x} + S_{2,x}$, $S_y = S_{1,y} + S_{2,y}$, $S_z = S_{1,z} + S_{2,z}$ in die drei kartesischen Richtungen und geben Sie die Matrixelemente der Operatoren der Beiträge zum Gesamtspin S_x^2, S_y^2, und S_z^2 an.

c) Zeigen Sie, dass eine Messung von $\boldsymbol{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ nur die beiden Werte 0 und $2\hbar^2$ ergeben kann und geben Sie die Entartung dieser Eigenwerte an.

d) Welchem Gesamtspin entsprechen die beiden möglichen Messergebnisse?

Hinweis: $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$,

$$S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; S_y = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & \mathrm{i} & \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \; S_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} +2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Beispiel **3)**: **Variationsrechnung** 3+6+5+2=16 Punkte

Ein Teilchen der Masse $m = 1$ befindet sich im Gravitationspotential der Erde

$$H = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \begin{cases} gz & z \geq 0 \\ \infty & z < 0 \end{cases} , \tag{4}$$

wobei wir zur Einfachheit $\hbar = 1$ setzen und nur die Dimension in z-Richtung betrachten.

a) Da wir den Grundzustand nicht kennen, raten wir als Variationsansatz

$$\psi_\lambda(z) = \begin{cases} z\mathrm{e}^{-\lambda z} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0\,. \end{cases} \tag{5}$$

Skizzieren Sie sowohl das Potential als auch den Variationsansatz und geben Sie ohne Wissen über den exakten Grundzustand mindestens ein Argument an, warum dieser Variationsansatz plausibel ist.

b) Berechnen Sie folgenden Ausdruck. Was ist seine Bedeutung?

$$\min_\lambda \frac{\langle\psi_\lambda|H|\psi_\lambda\rangle}{\langle\psi_\lambda|\psi_\lambda\rangle}\,. \tag{6}$$

c) Schätzen Sie den Erwartungswert des Ortes im Grundzustand mit Hilfe des Variationsansatzes ab.

d) Erklären Sie, warum der Erwartungswert des Ortes auch für den exakten Grundzustand größer 0 (also über dem "Boden") liegt. Nehmen Sie dabei an, dass die exakte Grundzustandswellenfunktion stetig ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Integralformel

$$\int_0^\infty \mathrm{d}z\; z^n\,\mathrm{e}^{-z} = n! \qquad \text{für } n \geq 0\,. \tag{7}$$