1.Prüfung Quantentheorie I,
Freitag, 22. 11. 2019

Name: **Matrikelnummer:** **Hörsaal:**

B1	B2	B3	B4	Σ
12	14	16	8	50

WICHTIG: Bitte schreiben Sie die Matrikelnummer **deutlich**, da diese dazu dienen wird, Ihnen Ihre Punkte individuell zu übermitteln.

Viel Erfolg!

Beispiel **1)**: **Zwei-Niveau-System** 2+2+2+2+2+2=12 Punkte

Wir betrachten ein Zwei-Niveau-System mit dem Hamiltonoperator

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\big(- |E_0\rangle\langle E_0| + |E_1\rangle\langle E_1|\big)\ , \tag{1}$$

wobei die $|E_i\rangle$, $i = 0, 1$, die orthonormierten Eigenzustände von H sind. Der normierte Anfangszustand zur Zeit $t = 0$ sei durch $|\psi\rangle = c_0|E_0\rangle + c_1|E_1\rangle$ mit $c_i \in \mathbb{C}$ gegeben.

a) Zeigen Sie, dass gelten muss: $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$.

b) Berechnen Sie den Zustand des Systems für alle Zeiten $t > 0$.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, den Anfangszustand zur Zeit $t > 0$ erneut zu messen.

d) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$|e_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|E_0\rangle + |E_1\rangle\big) \tag{2}$$

$$|e_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|E_0\rangle - |E_1\rangle\big) \tag{3}$$

orthonormiert, aber keine Eigenzustände von H sind.

e) Drücken Sie $|\psi\rangle$ nur durch $|e_0\rangle$ und $|e_1\rangle$ aus.

f) Zeigen Sie, dass der Operator

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|E_0\rangle\langle e_0| + |e_0\rangle\langle E_0| - |E_1\rangle\langle e_1| - |e_1\rangle\langle E_1|\big) \tag{4}$$

der Einheitsoperator ist.

Beispiel **2) Potentialstufe** 2+6+6 = 14 Punkte

Ein Strom von Teilchen der Masse m mit Energie $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ trifft von *links* in positiver x-Richtung laufend auf das Potential (eindimensionales Problem)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases}, \quad V_0 > 0\,.$$

a) Skizzieren Sie den Potentialverlauf $V(x)$. Wie lauten die Anschlussbedingungen der Wellenfunktion $\psi(x)$ an der Unstetigkeitsstelle des Potentials $x = 0$ (keine Herleitung erforderlich)?

b) Lösen Sie die stationäre Schrödingergleichung und ermitteln Sie die Wellenfunktion $\psi_k(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie den Fall $E < V_0$.

c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten $\rho_k(x)$ des Teilchenstroms für alle $x \in \mathbb{R}$ für $E < V_0$. Skizzieren Sie den Verlauf der Wahrscheinlichkeitsdichten.

Beispiel **3) Harmonischer Oszillator** 2+2+6+6 = 16 Punkte

Wir betrachten einen quantenmechanischen harmonischen Oszillator in einer Dimension mit dem Hamiltonoperator:

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right) = \frac{m\omega^2 X^2}{2} + \frac{P^2}{2m}. \tag{5}$$

Mit $a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{X}{x_0} + i\frac{P}{x_0 m\omega}\right)$ und $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$.

a) Ist $a^\dagger$ ein hermitescher Operator (begründen Sie ihre Antwort mittels Rechnung)?

b) Der Hamiltonoperator ist invariant unter der Paritätstransformation $\Pi : x \rightarrow -x$. Zeigen Sie, dass Π ein selbstadjungierter Operator ist.

c) Berechnen Sie die folgenden Kommutatorrelationen:

$$[a^\dagger, a] \qquad [a, H] \qquad [H, a^\dagger] \tag{6}$$

d) Berechnen Sie die Matrixelemente des Ortsoperators X und Impulsoperators P in der Basis der Eigenfunktionen von H,

$$\langle n|X|m\rangle \qquad \text{und} \qquad \langle n|P|m\rangle \ . \tag{7}$$

Beispiel **4) Schrödingergleichung** 8 Punkte

Wir betrachten eine eindimensionale Wellenfunktion mit Definitionsbereich $x > 0$ für ein Teilchen der Masse m. Diese Wellenfunktion ist Eigenzustand eines Hamiltonoperators.

$$\psi(x) = \alpha \cdot \frac{x}{x_0} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{x}{x_0}} \ , \qquad \alpha \in \mathbb{C} \ , \ x_0 > 0 \ . \tag{8}$$

Berechnen Sie das Potential $V(x)$ in dem dieses Teilchen lebt und den zu $\psi(x)$ gehörenden Eigenwert. Nutzen sie aus, dass $V(x)$ im unendlichen verschwindet: $V(x \to \infty) = 0$.