2.Prüfung Quantentheorie I,
Freitag, 24.01.2020

Name: **Matrikelnummer:**

B1	B2	B3	Σ
16	18	16	50

WICHTIG: Bitte schreiben Sie die Matrikelnummer **deutlich**, da diese dazu dienen wird, Ihnen Ihre Punkte individuell zu übermitteln.

Viel Erfolg!

Beispiel **1)**: **Spin $\frac{1}{2}$-Teilchen** 2+2+4+4+4=16 Punkte

Wir betrachten den Hamiltonoperator eines Spin $\frac{1}{2}$-Teilchens in einem Magnetfeld $H = -\gamma \boldsymbol{S}\boldsymbol{B}$, wobei $\boldsymbol{S} = (S_x, S_y, S_z)^T$ der Spin-Operator und $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_z)^T$ das Magnetfeld ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im Zustand

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle - \mathrm{i}|-\rangle\big) \ . \tag{1}$$

Hier sind $|\pm\rangle$ die Eigenzustände, des Spin-Operators in z-Richtung: $S_z|\pm\rangle = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle$.

a) Berechnen Sie die drei Kommutatoren $[H, S_i]$ mit $i = x, y, z$.

b) Zeigen Sie: $S_i^2 = \frac{\hbar^2}{4}\mathbb{1}$ und $\boldsymbol{S}^2 = \frac{3\hbar^2}{4}\mathbb{1}$ mit $i = x, y, z$ und dem Einheitsoperator $\mathbb{1}$.

c) Berechnen Sie die Zeitentwicklung des Systems $|\psi(t)\rangle = \exp(-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}Ht)|\phi\rangle$.

d) Geben Sie die Zeiten an, in denen mit Sicherheit (d.h. mit Wahrscheinlichkeit 1) ein Spin von $+\hbar/2$ in y-Richtung gemessen wird. Lassen sich solche Zeiten auch für eine Messung von $+\hbar/2$ in z-Richtung finden?

e) Berechnen Sie den zeitlichen Verlauf für den Erwartungswert des Spins in z-Richtung.

Hinweis: $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Beispiel **2)**: **Drehimpuls** 4+4+4+6=18 Punkte

a) Der Hamilton-Operator eines starren Moleküls, das um den Koordinatenursprung im Schwerpunktsystem rotiert, lautet:

$$H = \frac{\boldsymbol{L}^2}{2\Theta}. \tag{2}$$

$\boldsymbol{L}$ ist der Bahndrehimpulsoperator und Θ das skalare Trägheitsmoment des Moleküls. Welche Werte kann das Messgrößenpaar $\{H, L_z\}$ annehmen?

b) Geben Sie folgende Kommutatorrelationen für den Drehimpulsoperator an (Rechnung nicht zwingend notwendig):

$$\text{(i)} \quad [\boldsymbol{L}^2, L_i] \qquad\qquad \text{(ii)} \quad [L_i, L_j] \tag{3}$$

c) Ein Operator C erfüllt $[C, L_x] = 0$ und $[C, L_y] = 0$. Beweisen Sie, dass dann auch C mit L_z vertauschen muss.

d) Zeigen Sie, dass der Vektoroperator $(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{L} - \boldsymbol{L} \times \boldsymbol{P})$ normal auf $\boldsymbol{L}$ steht, also in Indexschreibweise folgendes gilt:

$$L_i \left(\epsilon_{ijk} P_j L_k - \epsilon_{ijk} L_j P_k\right) = 0\ . \tag{4}$$

Hinweis: Verwenden Sie $[L_i, P_j] = \mathrm{i}\hbar \epsilon_{ijk} P_k$ und $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl} = 2\delta_{kl}$.

Beispiel **3)**: **Störungstheorie für das Wasserstoffatom** 2+10+4=16 Punkte

In der Vorlesung wurde der Grundzustand $\psi(\boldsymbol{r}) = (\pi)^{-1/2}\exp(-r)$ und die Grundzustandsenergie $E_1^0 = -1/2$ des Wasserstoffatoms berechnet, sodass

$$H_0\psi(\boldsymbol{r}) = E_1^0\psi(\boldsymbol{r}) \qquad \text{mit} \qquad H_0 = -\frac{1}{2}\nabla^2 - \frac{1}{r}. \tag{5}$$

Der Kürze halber werden atomare Einheiten verwendet. Wir betrachten nun ein Störpotential $V(\boldsymbol{r})$, sodass der gestörte Hamiltonian durch

$$H = H_0 + V(\boldsymbol{r})\ , \qquad V(\boldsymbol{r}) = \begin{cases} -\dfrac{1}{R}\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{R}{r} - \dfrac{r^2}{2R^2}\right) & r \leq R, \\ 0 & r > R\ , \end{cases} \tag{6}$$

gegeben ist. Dies entspricht einem Wasserstoffatom, bei dem der Kern nicht als Punktladung, sondern als homogen geladene Kugel mit Radius R angenommen wird.

a) Geben Sie den mathematischen Ausdruck die Korrektur der Grundzustandsenergie in 1. Ordnung E_1^1 an.

b) Zeigen Sie, dass diese Korrektur durch $E_1^1 = \dfrac{2}{5}R^2$ gegeben ist.

c) Berechnen Sie den relativen Fehler der Grundzustandsenergie, wenn wir den Kern nur als Punktladung betrachten und obige Korrektur vernachlässigen. Verwenden Sie dabei $R \approx 10^{-5}$.

Hinweis: Verwenden Sie die Integralformel

$$\int_0^{\varepsilon} \mathrm{d}x\ x^n\,\mathrm{e}^{-x} \approx \frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1} \qquad \text{für } n \geq 0\,,\ \varepsilon \ll 1 \tag{7}$$

da der Kernradius R deutlich kleiner ist als der bohrsche Radius, $R \ll 1$.