

3. Prüfung VU Quantentheorie I, 19.03.2021

1. Beispiel (16 Punkte)

Betrachten Sie einen Hamiltonoperator \hat{H}_0 , dessen Eigenenergien $E_n^{(0)}$ nicht entartet sind: $\hat{H}_0 |\Phi_n\rangle = E_n^{(0)} |\Phi_n\rangle$. Der Hamiltonoperator \hat{H}_0 unterliege nun einer kleinen Störung, $\hat{H}(\lambda) = \hat{H}_0 + \lambda\hat{V}$ und somit $\hat{H}(\lambda) |\psi_n(\lambda)\rangle = E_n(\lambda) |\psi_n(\lambda)\rangle$. Im Folgenden genügt es, ein bestimmtes n zu betrachten.

- Zeigen Sie durch explizite Ableitung, dass die Energiekorrektur in erster Ordnung Störungstheorie durch $E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | \hat{V} | \psi_n^{(0)} \rangle$ gegeben ist.
- Zeigen Sie durch explizite Ableitung, wie der gestörte Eigenvektor $|\psi_n(\lambda)\rangle$ in erster Ordnung Störungstheorie näherungsweise berechnet wird.

Nehmen sie nun an, \hat{H}_0 sei der Hamiltonoperator eines Teilchens im unendlich tiefen Potentialtopf mit

$$V_0(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es werde nun eine kleine Störung $\lambda V(x) = \lambda \delta(x - L/2)$ hinzugefügt.

- Berechnen Sie die Energiekorrektur in erster Ordnung, $E^{(1)}$, für den Grundzustand sowie den ersten angeregten Zustand des gestörten unendlich tiefen Potentialtopfes.

Hinweis:

$$\int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)^2 dx = \frac{L}{2}, \quad n \in \mathbb{N}_+$$

2. Beispiel (18 Punkte)

Gegeben sei die gemeinsame Orts- und Spineigenbasis des Elektrons im Wasserstoffatom $|n, l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle \equiv |n, l, m_l, s, m_s\rangle$ mit dem Hamiltonoperator

$$\hat{H} = \left(-\frac{\hat{p}^2}{2\mu} + V(r) \right) \otimes \hat{1}$$

und den entsprechenden Eigenenergien

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2} \frac{1}{n^2}.$$

- Welche Werte können die einzelnen Quantenzahlen n , l , m_l , s und m_s hier annehmen?
- Berechnen Sie den Entartungsgrad der Energie E_n für eine beliebige Hauptquantenzahl n .

Das Elektron befinde sich nun im normierten Zustand

$$|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{6}} |2, 1, 1\rangle \right) \otimes |1/2, 1/2\rangle + \left(\frac{2}{\sqrt{6}} |3, 2, -1\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}} |2, 1, -1\rangle \right) \otimes |1/2, -1/2\rangle.$$

- Berechnen Sie für den Zustand $|\psi\rangle$
 - den Erwartungswert von \hat{L}^2 ,
 - die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung von \hat{S}_z den Wert $-\hbar/2$ zu erhalten,
 - den Erwartungswert der Energie des Elektrons.

Geben Sie bei (i), (ii), (iii) auch den Rechenweg an.

Es sei nun $\hat{J} = \hat{L} + \hat{S}$ der Gesamtdrehimpuls des Elektrons.

- Transformieren Sie den Zustand $|\psi\rangle$ von der Produktbasis $\{\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{L}_z, \hat{S}^2, \hat{S}_z\}$ in die gekoppelte Basis $\{\hat{H}, \hat{L}^2, \hat{S}^2, \hat{J}^2, \hat{J}_z\}$ mithilfe der unten angefügten Clebsch-Gordan Tabellen.
- Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung von \hat{J}_z den Wert $-\frac{3\hbar}{2}$ zu messen. Geben Sie auch den Rechenweg an.

$1 \times 1/2$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">$3/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$+$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$3/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">$+1$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$+1/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> <td style="padding: 2px 5px;">1</td> </tr> </table>	$3/2$	$+$	$3/2$	1	$+1$	$+1/2$	1	1	$2 \times 1/2$	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">$5/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$3/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$5/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$3/2$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">$+2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$-1/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$1/5$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$4/5$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">$+1$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$+1/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$4/5$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$-1/5$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">0</td> <td style="padding: 2px 5px;">$-1/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$3/5$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$2/5$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">-1</td> <td style="padding: 2px 5px;">$+1/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$2/5$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$-3/5$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">-1</td> <td style="padding: 2px 5px;">$-1/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$5/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$3/2$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">-2</td> <td style="padding: 2px 5px;">$+1/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$4/5$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$1/5$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">-2</td> <td style="padding: 2px 5px;">$+1/2$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$1/5$</td> <td style="padding: 2px 5px;">$-4/5$</td> </tr> </table>	$5/2$	$3/2$	$5/2$	$3/2$	$+2$	$-1/2$	$1/5$	$4/5$	$+1$	$+1/2$	$4/5$	$-1/5$	0	$-1/2$	$3/5$	$2/5$	-1	$+1/2$	$2/5$	$-3/5$	-1	$-1/2$	$5/2$	$3/2$	-2	$+1/2$	$4/5$	$1/5$	-2	$+1/2$	$1/5$	$-4/5$
$3/2$	$+$	$3/2$	1																																								
$+1$	$+1/2$	1	1																																								
$5/2$	$3/2$	$5/2$	$3/2$																																								
$+2$	$-1/2$	$1/5$	$4/5$																																								
$+1$	$+1/2$	$4/5$	$-1/5$																																								
0	$-1/2$	$3/5$	$2/5$																																								
-1	$+1/2$	$2/5$	$-3/5$																																								
-1	$-1/2$	$5/2$	$3/2$																																								
-2	$+1/2$	$4/5$	$1/5$																																								
-2	$+1/2$	$1/5$	$-4/5$																																								

Notation:	<table style="border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">J</td> <td style="padding: 2px 5px;">J</td> <td style="padding: 2px 5px;">\dots</td> </tr> <tr> <td style="padding: 2px 5px;">M</td> <td style="padding: 2px 5px;">M</td> <td style="padding: 2px 5px;">\dots</td> </tr> </table>	J	J	\dots	M	M	\dots
J	J	\dots					
M	M	\dots					
m_1	m_2						
m_1	m_2	Coefficients					
\cdot	\cdot	\cdot					
\cdot	\cdot	\cdot					

Abbildung 1: Eine Wurzel muss von jedem Koeffizienten gezogen werden, d.h. $-\frac{2}{5}$ steht für $-\sqrt{\frac{2}{5}}$.

3. Beispiel (16 Punkte)

Ein Teilchen der Ladung $q > 0$ und Masse m befinde sich in einem eindimensionalen harmonischen Oszillatorpotential, dessen Eigenfunktionen $\phi_n(x)$ sowie Eigenenergien e_n bekannt seien. Unter dem zusätzlichen Einfluss eines uniformen elektrischen Feldes $\mathcal{E} > 0$, das parallel zur x -Achse gerichtet ist, lautet die stationäre Schrödingergleichung im Ortsraum dann

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right) \Psi_n(x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - q\mathcal{E}x\right) \Psi_n(x) = E_n \Psi_n(x).$$

- a) Ergänzen Sie zuerst das Potential $V(x)$ auf ein vollständiges Quadrat der Form

$$V(x) = \alpha(x - \beta)^2 - \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R},$$

und fertigen Sie eine Skizze des Potentials an.

- b) Zeichnen Sie die Wellenfunktionen $\Psi_n(x)$ des Grundzustandes sowie des ersten angeregten Zustandes in Ihre Skizze des Potentials ein.

- c) Wie lauten die Eigenenergien E_n dieses Systems? Wie groß ist die Energiedifferenz ΔE zwischen zwei aufeinanderfolgenden Energien?

Hinweis: Überlegen Sie anhand des Potentials, wie sich die Energien E_n bzw. die Eigenfunktionen $\Psi_n(x)$ gegenüber dem Fall $\mathcal{E} = 0$ ändern.

- d) Berechnen Sie den Erwartungswert des Dipoloperators, $\hat{D} = q\hat{x}$, für die Fälle $\mathcal{E} = 0$ und $\mathcal{E} > 0$, wenn sich das System in einem Eigenzustand von \hat{H} befindet.

Hinweis: Die auftretenden Integrale können allesamt unter Berücksichtigung von Symmetrieeigenschaften gelöst werden. Substituieren Sie bei Bedarf die Variable x durch $u = x - \frac{q\mathcal{E}}{m\omega^2}$.

Viel Erfolg!