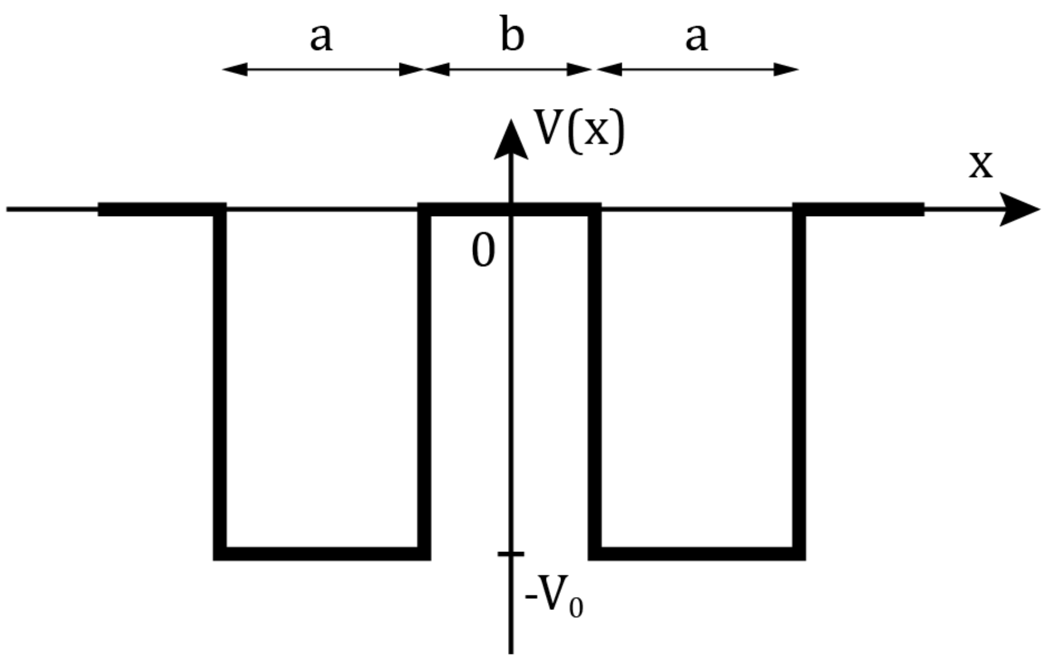
1. Prüfung VU Quantentheorie I, 4.12.2020

1. Beispiel **(16 Punkte - 25 Minuten Arbeitszeit)**

Ein Teilchen der Masse m bewege sich nur entlang der x-Koordinate und befinde sich unter dem Einfluss des unten abgebildeten Potentials $V(x)$. Für die Energie des Teilchens E gelte: $-V_0 < E < 0$. Die Parameter V_0 und a seien beide positiv, fixiert und groß genug, damit viele gebundene Zustände auftreten.



Die folgenden Aufgaben sind ohne explizite Rechnung zu bearbeiten:

a) Zeichnen Sie die Wellenfunktion des Grundzustandes $\Psi_0(x;b)$ mit Energie E_0 sowie jene des 1. angeregten Zustandes $\Psi_1(x;b)$ mit Energie E_1 in entsprechende Skizzen für die folgenden drei Fälle ein:
(i) $b = 0$, (ii) $b \approx a$ und (iii) $b \gg a$.
Hinweis: Aus Ihren Skizzen sollten die Krümmungen, die Wendepunkte und Nullstellen der Wellenfunktionen ersichtlich sein, sowie die Reihenfolge der zugehörigen Eigenenergien.

b) Überlegen Sie, wie sich die Anregungsenergie $\Delta(b) = |E_1(b) - E_0(b)|$ als Funktion von b verhält. Skizzieren Sie $\Delta(b)$ für $b \in (0, \infty)$. Bei welchem Wert von b wird $\Delta(b)$ minimal bzw. maximal?
Hinweis: Die Funktion $\Delta(b)$ ist streng monoton und stetig.

c) Betrachten Sie nun den Fall $b \gg a$. Geben Sie, passend zu Ihrer Skizze aus Punkt (a, iii), jene Linearkombination von $\Psi_0(x)$ und $\Psi_1(x)$ an, für die die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Teilchens in der linken Mulde maximal und in der rechten Mulde fast 0 wird.

2. Beispiel **(17 Punkte - 30 min Arbeitszeit)**

Es seien A und B die hermiteschen Operatoren zweier komplementärer Observablen, d.h. $[A, B] = i\hbar$. Leiten Sie, ausgehend von der Definition des Fluktuationsoperators $\Delta A \coloneqq A - \langle A \rangle$, die Heisenbergsche Unschärferelation her:

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{\hbar}{2} \,. \tag{1}$$

Hier bezeichnet σ die Standardabweichung des jeweiligen Operators.

a) Zeigen Sie zunächst, dass die Varianz von A dem Erwartungswert des Quadrats des Fluktuationsoperators entspricht:

$$\left\langle (\Delta A)^2 \right\rangle = \left\langle A^2 \right\rangle - \langle A \rangle^2 \,.$$

b) Zeigen Sie nun, dass

$$\left| \langle \psi \,| AB |\, \psi \rangle \right|^2 = \frac{1}{4} \Big(\left| \langle \psi \,|\, [A, B] \,|\, \psi \rangle \right|^2 + \left| \langle \psi \,|\, [A, B]_+ \,|\, \psi \rangle \right|^2 \Big)$$

gilt. Hier ist $[A, B]_+ \coloneqq AB + BA$ der Antikommutator.
Hinweis: Überlegen Sie, welche Eigenschaften die Erwartungswerte eines hermiteschen bzw. eines anti-hermiteschen Operators haben.

c) Leiten Sie nunmehr die Heisenbergsche Unschärferelation her [Gleichung (1)], indem Sie annehmen, dass der Erwartungswert von A und B jeweils gleich 0 ist.

3. Beispiel **(17 Punkte - 30 Minuten Arbeitszeit)**

Der Hamiltonoperator $\hat{H}$ eines physikalischen Systems sei in einem 3-dimensionalen Hilbertraum durch seine Darstellung $H^{\{\phi\}}$ in einer orthonormalen Basis $\{\phi\} = \{|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle, |\phi_3\rangle\}$ gegeben. Ein dazu kompatibler Operator $\hat{B}$ mit $[\hat{H}, \hat{B}] = 0$ sei ebenfalls durch seine Darstellung $B^{\{\phi\}}$ in derselben Basis $\{\phi\}$ gegeben:

$$H^{\{\phi\}} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B^{\{\phi\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2i & 0 \\ -2i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Schreiben Sie eine unitäre Matrix U an, welche die Matrizen $H^{\{\phi\}}$ und $B^{\{\phi\}}$ diagonalisiert, d.h. für welche das Matrixprodukt $U^\dagger H^{\{\phi\}} U$ bzw. $U^\dagger B^{\{\phi\}} U$ eine Diagonalmatrix ergibt.

b) Wieviel Energie benötigt ein Teilchen um vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand überzugehen? Ist der erste angeregte Zustand entartet?

c) Nehmen Sie an, ein Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im normierten Zustand

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\big(i\,|\phi_1\rangle + |\phi_2\rangle + |\phi_3\rangle \big).$$

Geben Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ dieses Teilchens für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ an.

d) Mit welcher Wahrscheinlichkeit messen Sie an dem Zustand $|\psi(0)\rangle$ eine Energie von $E = -1$? Berechnen Sie den Erwartungswert der Energie für den Zustand $|\psi(0)\rangle$.

Viel Erfolg!