2. Prüfung VU Quantentheorie I, 29.01.2021

1. Beispiel **(16 Punkte - 45 min Arbeitszeit)**

Gegeben sei eine Ortswellenfunktion des Elektrons in einem Wasserstoffatom

$$\psi(x,y,z) = C\left[3\sqrt{\frac{1}{4\pi}}R_{3,0}(r) + (1+i\sqrt{7})\sqrt{\frac{15}{8\pi}}R_{4,2}(r)\left(\frac{x^2-y^2}{r^2}\right)\right],$$

wobei $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Die normierten radialen Eigenfunktionen $R_{n,l}(r)$ sowie die Energieeigenwerte dürfen Sie als bekannt annehmen. Nützliche Formeln:

$$Y_0^0(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}\,,\ \ Y_2^{\pm 1}(\theta,\phi) = \mp\frac{1}{2}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}e^{\pm i\phi}\sin(\theta)\cos(\theta)\,,\ \ Y_2^{\pm 2}(\theta,\phi) = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}e^{\pm 2i\phi}\sin^2(\theta)\,,$$

$$\cos^2(\phi) - \sin^2(\phi) = \cos(2\phi).$$

a) Wie sind die radialen Eigenfunktionen $R_{n,l}(r)$ und die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta,\phi)$ jeweils für sich im Ortsraum normiert? Schreiben Sie dazu die expliziten L^2-Normintegrale an (ohne diese zu berechnen).

b) Bestimmen Sie die Normierungskonstante C.

c) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten bei einer Energiemessung an ψ die Energieeigenwerte E_1, E_2, E_3 und E_4 zu erhalten? (E_1: Grundzustandsenergie)

d) Nehmen Sie nun an, dass Sie bei einer Energiemessung den Messwert E_4 erhalten. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten erhalten Sie bei einer unmittelbar darauf folgenden Messung von m_l die dafür möglichen Messwerte?

e) Bestimmen Sie die Parität der Wellenfunktion ψ (Rechnung oder Begründung notwendig).

f) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit an ψ für das Messgrößenpaar $\{L^2, L_z\}$ den Wert $\{6\hbar^2, -2\hbar\}$ zu messen.

2. Beispiel **(17 Punkte - 45 Minuten Arbeitszeit)**

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich ein harmonischer Oszillator mit Eigenfrequenz ω, Masse m und Eigenzuständen $|\psi_n\rangle$ im kohärenten Glauber-Zustand

$$|\phi_\alpha(t=0)\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n\rangle \ , \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

a) Zeigen Sie, dass der Glauber-Zustand $|\phi_\alpha(t=0)\rangle$ ein Eigenzustand von $\hat{a}$ ist. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

b) Berechnen Sie den Zustand $|\phi_\alpha(t)\rangle$ für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$. Zeigen Sie, dass sich dieser Zustand in der Form

$$|\phi_\alpha(t)\rangle = e^{-i\omega t/2} \left|\phi_{\alpha(t)}(t=0)\right\rangle$$

schreiben lässt und bestimmen Sie den Ausdruck für $\alpha(t)$.

c) Zeigen Sie, dass der Ortserwartungswert, $\langle\phi_\alpha(t)\,|\hat{x}|\,\phi_\alpha(t)\rangle$, für $t > 0$ der klassischen Bewegung $x(t) = D\cos(\omega t - \delta)$ entspricht. Wie hängen m, ω und α mit D und δ zusammen?

d) Betrachten Sie die Anfangsbedingung $\langle\phi_\alpha(0)\,|\hat{x}|\,\phi_\alpha(0)\rangle = x_U$, wobei $x_U > 0$ ein Umkehrpunkt ist. Bestimmen Sie α, sodass der Glauber-Zustand diese Anfangsbedingung erfüllt.

e) Zu welchem Zeitpunkt $t > 0$ erreicht dieser Glauber-Zustand [aus (d)] zum ersten Mal $x = 0$?

f) Betrachten Sie einen zweiten Glauber-Zustand $|\phi_\beta(t=0)\rangle$. Berechnen Sie $|\langle\phi_\beta(t=0)\,|\,\phi_\alpha(t=0)\rangle|^2$ (vereinfachen Sie dazu die auftretenden Summenausdrücke). Was können Sie anhand Ihres Ergebnisses über die Orthogonalität von Glauber-Zuständen sagen?

Hinweise:

$$\hat{x} = \frac{x_0}{\sqrt{2}}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger), \quad \hat{p} = -i\frac{p_0}{\sqrt{2}}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger)$$

$$\text{mit } \ x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$$

3. Beispiel **(17 Punkte - 45 Minuten Arbeitszeit)**

Der Hamiltonoperator eines Systems mit zwei (unterscheidbaren) Spins $s = 1/2$, das unter dem Einfluss eines Magnetfelds $\vec{B} = B\vec{e}_z$, mit $B > 0$, steht und eine ferromagnetische Wechselwirkung unter den Spins aufweist, ist durch

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} - \frac{4\beta}{\hbar^2} \vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)}$$

gegeben, wobei $\beta > 0$, $\vec{S}^{(i)}$ ist der Spinoperator zum Spin i, $\vec{\mu} = \vec{\mu}^{(1)} + \vec{\mu}^{(2)}$ ist das magnetische Moment des Gesamtspins $\vec{J} = \vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)}$ und $\vec{e}_z$ ist der Einheitsvektor in z-Richtung ist. Es gilt $\vec{\mu}^{(i)} = -|\gamma|\vec{S}^{(i)}$.

a) Zeichnen Sie die Punktdiagramme der Drehimpulsaddition für die beiden Spins sowohl in der j/m_j als auch in der $m_s^{(1)}/m_s^{(2)}$-Ebene und verbinden Sie in beiden Diagrammen Zustände mit konstantem m_j durch Linien.

b) Schreiben Sie nun den Hamiltonoperator H in der gekoppelten Basis $\{(\vec{S}^{(1)})^2, (\vec{S}^{(2)})^2, \vec{J}^2, J_z\}$ an und berechne Sie damit alle Eigenwerte und die dazu gehörenden Eigenvektoren.

c) Wie lautet der Grundzustand in der Produktbasis $\left|m_s^{(1)}, m_s^{(2)}\right\rangle$? Wie sind die beiden Spins demnach relativ zum B-Feld ausgerichtet?

Hinweis: Sollten Sie (a,b,c) nicht gelöst haben, rechnen Sie bei (d,e,f) mit allgemeinen Ausdrücken weiter, also $E_{j,m_j} = \hbar\omega_{j,m_j}$.

d) Nehmen Sie an, das System befinde sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Zustand

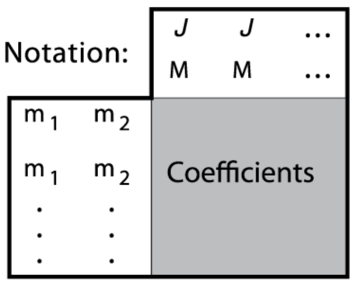
$$|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}\left| -1/2, +1/2\right\rangle + \frac{2}{\sqrt{5}}\left| -1/2, -1/2\right\rangle,$$

gegeben in der Produktbasis $\left|m_s^{(1)}, m_s^{(2)}\right\rangle$. Geben Sie die Zeitentwicklung des Zustands $|\chi\rangle$ für alle Zeiten $t \geq 0$ an.

e) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür bei einer Messung von $\vec{J}^2$ an $|\chi\rangle$ zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \geq 0$ den Wert $2\hbar^2$ zu erhalten.

f) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle \chi(t) \,| J_z |\, \chi(t)\rangle$ für alle Zeiten $t \geq 0$.

Clebsch-Gordan Tabelle: Eine Wurzel über jedem Koeffizienten ist mitgemeint, d.h. $\pm 1/2$ meint $\pm\sqrt{1/2}$.



$1/2 \times 1/2$		1 +1	1 0	0 0	1 −1
+1/2	+1/2	1			
+1/2	−1/2		1/2	1/2	
−1/2	+1/2		1/2	−1/2	
−1/2	−1/2				1

Viel Erfolg!