10. Tutorium VU Quantentheorie I, 18.12.2020

1. In der Vorlesung wurde gezeigt, wie der Operator L_z in sphärischen Koordinaten angeschrieben werden kann.

   a) Wenden Sie den gefundenen Ausdruck für L_z auf Beispiel 3 des 3. Tutoriums an. Stellen Sie sich dazu vor, dass der dort diskutierte Stab mit "periodischen Randbedingungen" in Form eines Kreisrings mit Radius $R = 1$ realisiert ist, der in der xy–Ebene liegt (Kreismittelpunkt im Koordinatenursprung). Wie können Sie in diesem Fall den Hamiltonoperator der freien Bewegung H_0 und die Energieeigenfunktionen ϕ_n auf dem Ring durch die Winkelkoordinate φ ausdrücken? Kommutieren die Operatoren H_0 und L_z? Wie sieht das vollständige Orthonormalsystem gemeinsamer Eigenvektoren von H_0 und L_z in der φ-Darstellung aus?

      Bildet hier L_z schon für sich alleine (also ohne H_0) einen vollständigen Satz kommutierender Observablen?

   b) Bestimmen Sie nun den Operator $\vec{L}^2$ in Kugelkoordinaten. Beweisen Sie dazu zuerst die Identität $\vec{L}^2 = L_+L_- + L_z^2 - \hbar L_z$. Berechnen Sie dann die Operatoren $L_\pm$ in sphärischen Koordinaten (alle in der Vorlesung vorgerechneten Ausdrücke dürfen dazu verwendet werden) und bestimmen Sie aus diesen Ausdrücken und aus L_z den gewünschten Operator $\vec{L}^2$.

   c) Vergleichen Sie den erhaltenen Ausdruck für $\vec{L}^2$ mit dem Laplace-Operator in Kugelkoordinaten (sh. Skriptum) und diskutieren Sie Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede.

2. Betrachten Sie den Rotationsfreiheitsgrad des Chlormoleküls (Cl_2).

   a) Überlegen Sie, wie die Rotationsenergie dieses Moleküls mit seinem Trägheitsmoment und seinem Drehimpuls in Zusammenhang steht. Erläutern Sie, wie Sie auf Basis dieses klassischen Zusammenhangs und durch die quantenmechanische Drehimpulsquantelung diskrete Niveaus für die Rotationsenergie erhalten.

   b) Schätzen Sie den Abstand zwischen benachbarten Energieniveaus im Rotationsspektrum von Cl_2 ab. (Der mittlere Abstand d zwischen den beiden Atomkernen des Moleküls kann dabei mit $d \approx 1\,\text{Å}$ als bekannt angenommen werden.)

   c) Mit Strahlung welcher Frequenz kann man einen Übergang vom Grundzustand in den ersten angeregten Zustand des Rotationsspektrums anregen?

3. Gegeben sei ein Teilchem im $\mathbb{R}^3$, das durch die Wellenfunktion

$$\psi(x,y,z) = \frac{1}{N}\,(x+y+z)\,\exp[-(r/a)^2], \quad r = \sqrt{\vec{x}^2}, \quad a, N \in \mathbb{R}$$

beschrieben wird. Mit welchen Wahrscheinlichkeiten treten alle für diese Wellenfunktion möglichen Messwerte der Observablen $\vec{L}^2$ und L_z auf? Stellen Sie dazu die Winkelverteilung der Wellenfunktion $\psi(x,y,z)$ (sh. Abbildung 1) als Linearkombination der entsprechenden Kugelflächenfunktionen dar (für eine entsprechende Auflistung sh. z.B. *https://de.wikipedia.org/wiki/Kugelflächenfunktionen*).

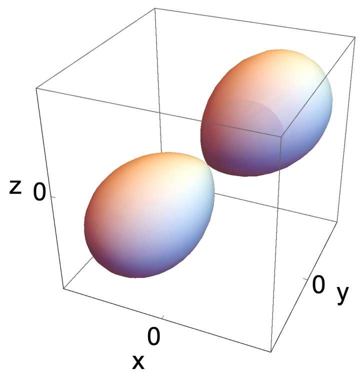

Abbildung 1: Winkelverteilung $|\Theta(\theta,\varphi)|^2$ von $\psi(x,y,z) = R(r)\cdot\Theta(\theta,\varphi)$.

Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle L_x\rangle$, $\langle L_y\rangle$, $\langle L_z\rangle$ in obigem Zustand. (Verwenden Sie die Symmetrien des Systems um Ihre Rechnung möglichst zu vereinfachen.)

4. Wie lässt sich der Drehimpulsoperator $L_{z'}$ bezüglich einer beliebigen Achse z' als Funktion der bekannten Operatoren L_x, L_y, L_z ausdrücken? Verwenden Sie dazu die jeweiligen Winkel, die die Achse z' mit den Achsen x, y, z einschließt.

   Wenden Sie Ihr Ergebnis für $L_{z'}$ nun auf einen Zustand $|\psi\rangle$ an, welcher Eigenzustand von L_z ist: $L_z\,|\psi\rangle = \hbar m\,|\psi\rangle$. Zeigen Sie, dass Sie bei einer Messung der Observable $L_{z'}$ im Mittel den Messwert $\hbar m \cos\vartheta$ erhalten, wenn die Achse z' einen Winkel ϑ mit der z-Achse einschließt. Erläutern Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe des in der Vorlesung besprochenen "Vektormodells" für den Drehimpuls.

   Hinweis: Gehen Sie für die Herleitung von $L_{z'}$ von folgendem Ausdruck für den Drehimpulsoperator in z-Richtung, $L_z = \varepsilon_{ijk} e_z^i x_j p_k$, aus, wobei e_z^i der Einheitsvektor in z-Richtung ist.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2/3/4