11. Tutorium VU Quantentheorie I, 08.01.2021

1. Betrachten Sie das Elektron eines Wasserstoffatoms, dessen Wellenfunktion zu einem bestimmen Zeitpunkt t_0 durch

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{N}\left[3\,\phi_{100}(\vec{r}) + \sqrt{5}i\,\phi_{200}(\vec{r}) + (1-3i)\,\phi_{210}(\vec{r}) - \sqrt{12}\,\phi_{21\text{-}1}(\vec{r}) + (2+3i)\,\phi_{32\text{-}1}(\vec{r})\right]$$

gegeben ist. Dabei sind die $\phi_{nlm}(\vec{r})$ die normierten Energieeigenfunktionen des Elektrons im Wasserstoffatom.

Normieren Sie die Wellenfunktion $\psi(\vec{r})$ und berechnen Sie für den Zeitpunkt t_0 (ohne Berücksichtigung des Spins):

a) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung der Energie die Werte E_1, E_2 oder E_3 zu erhalten, wobei

$$E_n = \frac{-\hbar^2}{2\mu a_o^2}\frac{1}{n^2}, \quad n \in \mathbb{N}\,.$$

b) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Bahndrehimpulsquadrats den Messwert $b_l = l(l+1)\hbar^2$ mit $l \in \mathbb{N}_0$ zu finden.

c) den Erwartungswert der $z-$Komponente des Bahndrehimpulses.

d) die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung des Messgrößenpaares {Energie, Bahndrehimpulsquadrat} das Messwertepaar

$$\left\{-\frac{\hbar^2}{8\mu a_0^2}, 2\hbar^2\right\}$$

zu finden. Hängt das Ergebnis davon ab, ob *zuerst* die Energie und *unmittelbar darauf* das Bahndrehimpulsquadrat oder umgekehrt gemessen wird?

Was erhält man für die unter (a) bis (d) gefragten Größen, wenn als Messzeitpunkt nicht t_0, sondern $t > t_0$ gewählt wird? Begründen Sie das Ergebnis unabhängig von einer etwaigen Rechnung.

2. Betrachten Sie das Elektron in einem $3p$-Orbital des Wasserstoffatoms

$$\langle\vec{r}\,|\,n=3,\ l=1,\ m=0\rangle = \sqrt{\frac{8}{27^2\pi a_0^5}}\left(1-\frac{r}{6a_0}\right) r e^{-\frac{r}{3a_0}}\cos(\theta)$$

$$a_0 := \frac{\hbar^2}{e^2\mu},$$

wobei a_0 der reduzierte Bohrradius und μ die reduzierte Masse des Wasserstoffatoms sind. Berechnen Sie:

a) den Erwartungswert und die Unschärfe des Abstandes des Elektrons vom Atomkern.
b) den wahrscheinlichsten Wert dieses Abstandes.
c) die Wahrscheinlichkeit, das Elektron in einem Abstand $r \leq a_0$ anzutreffen.

Hinweis:

$$\int_0^\infty \mathrm{d}\rho\, \rho^\nu e^{-\beta\rho} = \frac{\nu!}{\beta^{\nu+1}}, \qquad \nu \in \mathbb{N}_0, \quad \beta \in \mathbb{R}^+,$$
$$\int \mathrm{d}\theta \sin\theta \cos^2\theta = -\frac{\cos^3\theta}{3} + C.$$

3. Betrachten Sie das Gravitationssystem aus Erde und Sonne als Analogon zum Wasserstoffatom.

a) Wie verhält sich die potentielle Energie dieses Systems als Funktion des Abstands zwischen Erde und Sonne? Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Potential eines Elektrons im Wasserstoffatom, $V(r) = -e^2/(4\pi\varepsilon_0 r)$.
b) Berechnen Sie den „Bohrschen Radius" a_g für dieses System symbolisch und als Zahlenwert.
c) Schreiben Sie die gravitative „Bohrsche Formel" an. Zeigen Sie, dass $n^2 = r_0/a_g$, wobei r_0 der Radius des Orbits der Erde ist. Schätzen Sie damit die Energie-Quantenzahl n der Erde ab.
Hinweis: Betrachten Sie die totale Energie des Planeten als Summe aus kinetischer und potentieller Energie.
d) Nehmen Sie an, dass die Erde einen Übergang in das nächst-niedrigere Energieniveau mit $n-1$ durchführt. Wieviel Energie (in Joule) wird dabei freigesetzt? Wie groß ist die Wellenlänge des dabei freigesetzten Gravitons? Drücken Sie Ihr Resultat in Lichtjahren aus und interpretieren Sie es physikalisch.

4. Untersuchen Sie die Wahrscheinlichkeit P, ein Elektron im Grundzustand des Wasserstoffatoms innerhalb des Atomkerns zu finden.

a) Führen Sie zunächst die *exakte* Rechnung unter der Annahme durch, dass die Wellenfunktion,

$$\psi_{100}(\vec{r}) = \langle \vec{r}\,|\, n=1,\ l=0,\ m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} e^{-r/a_0}, \tag{1}$$

korrekt bis inklusive $r = 0$ ist. Der Radius des Atomkerns sei b.

b) Führen Sie eine Taylor-Entwicklung Ihres Ergebnisses für die kleine Zahl $\varepsilon = 2b/a_0$ durch und zeigen Sie, dass der führende Term kubisch ist.

c) Prüfen Sie, ob der alternative Lösungsansatz einer konstanten Wellenfunktion im Volumen des Atomkerns das gleiche Ergebnis liefert. Die konstante Wellenfunktion sei als $\psi_{100}(0)$ angenommen.

d) Verwenden Sie $b \approx 10^{-15}$ m und $a_0 \approx 0.5 \times 10^{-10}$ m um einen Zahlenwert für P zu erhalten. Wie können Sie dieses Ergebnis physikalisch interpretieren?

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2/3/4

Alles Gute für die bevorstehenden Feiertage und einen guten Rutsch ins neue Jahr 2021!