12. Tutorium VU Quantentheorie I, 15.01.2021

1. Betrachten Sie die Eigenzustände $|s\, m_s\rangle$ von $\hat{S}^2$ und $\hat{S}_z$ für ein Elektron mit Spin-Quantenzahl $s = 1/2$ und $m_s = \pm 1/2$,

$$\hat{S}^2 \, |s\, m_s\rangle = \hbar^2 s(s+1) \, |s\, m_s\rangle \, ,$$
$$\hat{S}_z \, |s\, m_s\rangle = \hbar m_s \, |s\, m_s\rangle \, .$$

Die zwei Eigenvektoren $\left|\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\rangle \equiv |+\rangle$ und $\left|\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv |-\rangle$ sollen nun als Basisvektoren des entsprechenden Spin-Hilbertraums verwendet werden.

a) Der zu $\hat{S}_z$ gehörige Auf- und Absteiger erfüllt folgende Beziehung

$$\hat{S}_\pm \, |s\, m_s\rangle = \hbar\sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} \, |s,\ m_s \pm 1\rangle \, .$$

Bestimmen Sie die Darstellung von $\hat{S}_\pm$ in der durch $\{|+\rangle \, , |-\rangle\}$ aufgespannten Basis.

b) Bestimmen Sie aus der Darstellung von $\hat{S}_\pm$ die Darstellungen von $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_y$ in der Basis $\{|+\rangle \, , |-\rangle\}$. Erhalten Sie für $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_y$ die gleichen Eigenwerte wie für S_z? Falls ja, warum ist dies der Fall? Bestimmen Sie die Eigenvektoren von $\hat{S}_x$ und $\hat{S}_y$ als Linearkombination von $|+\rangle$ und $|-\rangle$. Wie sehen die dazugehörigen Komponentenvektoren aus?

c) Zeigen Sie, dass gilt $(\vec{\sigma}\cdot\vec{A})(\vec{\sigma}\cdot\vec{B}) = \mathbb{1}\vec{A}\cdot\vec{B} + i\vec{\sigma}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$, wobei $\vec{A}$ und $\vec{B}$ beliebige Vektoroperatoren sind und $\sigma_i = 2S_i/\hbar$ die sogenannten Pauli-Matrizen sind. Sie können annehmen, dass die Komponenten der Vektoroperatoren mit den Pauli-Matrizen kommutieren.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst $[\sigma_i, \sigma_j] + \{\sigma_i, \sigma_j\}$.

2. Betrachten Sie die zeitliche Entwicklung eines Elektronenspins in einem uniformen und statischen Magnetfeld $\vec{B}$. Die klassische potenzielle Energie eines magnetischen Moments $\vec{\mu}$ ist gegeben durch $V = -\vec{\mu}\cdot\vec{B}$. Zur quantenmechanischen Beschreibung ersetzen wir $\vec{\mu}$ durch sein quantenmechanisches Äquivalent und erhalten

$$\hat{H} = \frac{e}{m}\hat{\vec{S}} \cdot \vec{B} = \frac{eB}{m}\hat{S}_z,$$

wobei wir das Koordinatensystem so ausrichten, dass das Magnetfeld in z-Richtung zeigt.
Hinweis: Falls Sie Bsp. 1 nicht gelöst haben, verwenden Sie die Pauli-Matrizen aus dem Skriptum.

a) Nehmen Sie an, ein Teilchen befindet sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im normierten Spin-Zustand $|\psi(t=0)\rangle = a\,|+\rangle + b\,|-\rangle$, mit $a, b \in \mathbb{C}$. Geben Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ dieses Teilchens für einen beliebigen Zeitpunkt $t > 0$ an.

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit bei einer Messung an $|\psi(t)\rangle$ einen positiven oder negativen Wert für die Spin-Projektion in die x-Richtung zu messen.

c) Berechnen Sie die Erwartungswerte von $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ und $\hat{S}_z$ für den Zustand $|\psi(t)\rangle$. Welche Bewegung führt der Spinvektor um die z-Achse aus und welchen Winkel nimmt er mit der z-Achse ein? Bestimmen Sie den Ausdruck für die Larmor-Frequenz, die diese Bewegung beschreibt. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem klassischen Resultat.

3. Nehmen Sie an, dass Sie vor der Aufgabe stehen mit Hilfe von Magnet-Resonanz-Tomographie (MRT) die Konzentration des Kohlenstoff-Isotops ^{13}C im Körper eines Patienten zu bestimmen. Durch seine ungerade Nukleonenzahl hat ^{13}C einen Kernspin mit Spinquantenzahl $s = 1/2$. In einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)^T$, tritt somit eine Zeeman-Aufspaltung bezüglich der beiden möglichen Spinausrichtungen $m_s = \pm 1/2$ auf.

   a) Berechnen Sie die entsprechende Magnetfeldstärke B, um einen Übergang zwischen den zwei auftretenden Energieniveaus zu induzieren, wenn die Übergangsfrequenz f, wie in der Medizin üblich, im Radiofrequenzbereich liegt, z.B. bei $f = 100\,\mathrm{MHz}$.

   b) Wie groß müsste B sein, um bei gleicher Frequenz eine Resonanz zu induzieren, wenn anstatt eines Atomkerns ein einzelnes Elektron betrachtet wird?

   c) Begründen Sie aus Ihren Ergebnissen, wieso bei herkömmlichen MRT-Geräten supraleitende Spulen zum Einsatz kommen.

   d) Der Kernspin im homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)^T$ sei nun zum Zeitpunkt $t = 0$ so ausgerichtet, dass bei einer Messung seiner y-Komponente mit Wahrscheinlichkeit 1 der Wert $+\hbar/2$ gemessen wird.
   Hinweis: Falls Sie Bsp. 1 nicht gelöst haben, verwenden Sie die Pauli-Matrizen aus dem Skriptum.

      i. Stellen Sie diesen Anfangszustand in der S_z-Eigenbasis dar.

      ii. Berechnen Sie, in welchem Zustand sich der Spin zu einem Zeitpunkt $t > 0$ befindet. Geben Sie auch diesen Zustand in der S_z-Eigenbasis an.

      iii. Nach welcher minimalen Zeit τ finden Sie bei einer Messung in $-y$-Richtung mit Wahrscheinlichkeit 1 den Wert $+\hbar/2$?

4. Im Stern-Gerlach Experiment werden Silberatome in y-Richtung durch ein inhomogenes Magnetfeld der Form $\vec{B}(x,y,z) = (-\alpha x, 0, B_0 + \alpha z)^T$ geschickt, wobei B_0 ein starkes homogenes Magnetfeld und α eine kleine Abweichung beschreibt. In einem Koordinatensystem, das sich mit dem Strahl aus Silberatomen mitbewegt, ist der Hamiltonoperator:

$$\hat{H}(t) = \begin{cases} 0, & \text{für } t < 0, \\ -\gamma(B_0 + \alpha z)\hat{S}_z, & \text{für } 0 \leq t \leq T, \\ 0, & \text{für } t > T. \end{cases}$$

Nehmen Sie nun an, dass das Atom mit Spin $s = 1/2$ sich für $t < 0$ im normalisierten Zustand $|\psi(t)\rangle = a\,|+\rangle + b\,|-\rangle$ mit $a, b \in \mathbb{C}$ befindet.

a) Warum spielt die x-Komponente von $\vec{B}$ keine Rolle in $\hat{H}$?

b) Bestimmen Sie den Zustand $|\psi(t)\rangle$ für $t \geq T$.

c) Berechnen Sie den Impuls in z-Richtung der Spin-up und der Spin-down Komponente von $|\psi(t)\rangle$. Vergleichen Sie Ihre Rechnung mit den Beobachtungen des Stern-Gerlach Experiments.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2/3/4