

13. Tutorium VU Quantentheorie I, 22.01.2021

1. Gegeben sind zwei Drehimpulsvektoren \vec{L} und \vec{S} , charakterisiert durch die beiden Quantenzahlen l und s . Zusammen bilden die beiden Drehimpulsvektoren den Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

- a) Skizzieren Sie die schematischen Darstellungen der Drehimpulsaddition in Form von Punktdiagrammen in der m_l/m_s - bzw. j/m_j -Ebene für $s = 2$ und $l = 1$ (wie in der Vorlesung gezeigt). Verbinden Sie in beiden Diagrammen Zustände (Punkte) mit konstantem m_j durch Linien.
- b) Der Zustand eines Spin-2-Teilchens sei in der entkoppelten Drehimpulsbasis gegeben durch folgende Superposition von Produkt-Zuständen:

$$|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|l m_{l1}\rangle \otimes |s m_{s1}\rangle + |l m_{l2}\rangle \otimes |s m_{s2}\rangle \right) \quad (1)$$

mit $l = 1$, $s = 2$, $m_{l1} = 0$, $m_{s1} = 2$, $m_{l2} = -1$ und $m_{s2} = -2$.

- Schreiben Sie den Zustand $|u\rangle$ in der gekoppelten Basis $|l s j m_j\rangle$ an. Verwenden Sie dazu die Clebsch-Gordan-Tabelle aus dem Skriptum oder von der [Particle Data Group](#).
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit messen Sie an diesem Zustand für die z -Komponente des Gesamtdrehimpulses den Wert $2\hbar$?
- Berechnen Sie den Erwartungswert des Gesamtdrehimpulsquadrates \vec{J}^2 in diesem Zustand.

2. Der Hamiltonoperator eines Systems mit zwei (unterscheidbaren) Spins $s = 1/2$ ist durch

$$H = \frac{\alpha}{\hbar} (S_z^{(1)} + S_z^{(2)}) + \frac{4\beta}{\hbar^2} \vec{S}^{(1)} \cdot \vec{S}^{(2)} \quad (2)$$

gegeben ($\alpha, \beta > 0$; $\vec{S}^{(i)}$: Spinoperator zu Spin i). Der erste Term in Glg. (2) beschreibt den Effekt eines externen Magnetfeldes in z -Richtung und der zweite Term beschreibt eine anti-ferromagnetische Wechselwirkung zwischen den beiden Spins.

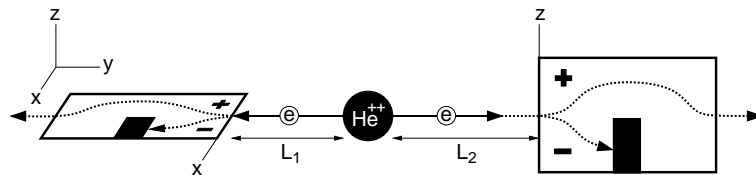
- a) Schreiben Sie den Hamiltonoperator in der gekoppelten Basis, gegeben durch die Operatoren $(\vec{S}^{(1)})^2$, $(\vec{S}^{(2)})^2$, $\vec{J}^2 = (\vec{S}^{(1)} + \vec{S}^{(2)})^2$ und $J_z = S_z^{(1)} + S_z^{(2)}$, an. Geben Sie nun zuerst alle möglichen Eigenzustände von H an und bestimmen Sie anschließend die dazugehörigen Energieeigenwerte. (Arbeiten Sie in der **gekoppelten** Basis $|s_1, s_2, j, m_j\rangle \equiv |j, m_j\rangle$.)
- b) Zeigen Sie nun anhand der Eigenzustände von H , dass

- i. das externe Magnetfeld für $\alpha > 0$ und $\beta = 0$ beide Spins parallel zueinander ausrichtet,
- ii. die anti-ferromagnetische Wechselwirkung für $\beta > 0$ und $\alpha = 0$ zu einer anti-parallelen Ausrichtung der beiden Spins führt.

Untersuchen Sie nun das Verhalten, wenn beide Terme wirken und somit $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Skizzieren Sie die Energien als Funktion von β für ein fixes α . Interpretieren Sie den Verlauf der Energieeigenwerte physikalisch. Für welches Verhältnis von α und β tritt Entartung auf?

- c) Geben Sie alle auftretenden Energieeigenzustände in der **entkoppelten** Basis $|m_{s1}, m_{s2}\rangle$ an. Nehmen Sie nun an, das System befinde sich im Zustand $|m_{s1}, m_{s2}\rangle = |1/2, -1/2\rangle$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit können in diesem Fall die möglichen Energieeigenwerte gemessen werden?

3. Im Grundzustand des Heliumatoms befinden sich die beiden Elektronen in einem Singlett-Zustand mit Gesamtspin $s = 0$. Das Atom werde nun durch einen Laserpuls doppelt ionisiert, d.h. dass beide Elektronen durch die Energie des Laserpulses aus einem Bindungszustand in einen Kontinuumszustand gehoben werden und einen zweifach-positiv geladenen Atomkern (He^{++}) zurücklassen. Sie können nun annehmen, dass die beiden Elektronen nach dem Ionisierungsprozess weiterhin durch einen Singlett-Zustand beschrieben werden, selbst wenn sie nach der Emission in unterschiedliche Raumrichtungen eine große räumliche Distanz zueinander aufweisen.



- a) Verwenden Sie eine Clebsch-Gordan-Tabelle um zu zeigen, wie sich der Singlett-Zustand $|s = 0, m_s = 0\rangle$ in der Produktbasis der beiden Elektronen $|s_1, m_{s1}\rangle \otimes |s_2, m_{s2}\rangle$ anschreiben lässt. (Eine Clebsch-Gordan-Tabelle finden Sie im Skriptum oder bei der [Particle Data Group](#).)
- b) Es werde nun zuerst an einem der beiden Elektronen der Wert $\hbar/2$ für die Observable S_α gemessen, wobei α die Projektion des Spins auf die negative x -Richtung angibt (sh. obige Abbildung eines entsprechenden Stern-Gerlach-Apparats mit $L_2 > L_1$). Welches Ergebnis können Sie im Mittel für eine darauffolgende Messung (i) von S_z und (ii) von S_x am zweiten Elektron erwarten?

- c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür in beiden Stern-Gerlach-Filtern eine positive (+) Spin-Projektion zu messen, wenn die beiden Achsen der Spin-Filter einen relativen Winkel von θ zueinander aufweisen (in obiger Abbildung ist $\theta = \pi/2$). Interpretieren Sie Ihre Resultate physikalisch.

Hinweis: Die Rechnung lässt sich deutlich vereinfachen, wenn die Richtung der 1. Messung gut gewählt wird.

Bemerkung: Die Ergebnisse der obigen Punkte illustrieren mehrere fundamentale Eigenschaften der Quantentheorie: Dass durch den Kollaps der Wellenfunktion bei der Messung an einem der beiden Teilchen auch der Zustand des anderen Teilchens festgelegt wird - selbst wenn sich dieses räumlich weit entfernt aufhält - ist eine Konsequenz der quantenmechanischen "Nichtlokalität". Letztere folgt wiederum aus dem Superpositionsprinzip und der probabilistischen Naturbeschreibung durch die Quantentheorie. Der Umstand, dass der Messwert am zweiten Teilchen durch die Art der Messung am ersten Teilchen (wie z.B. die Projektionsachse bei der Spin-Messung) mitbeeinflusst wird, wird als "Quanten-Kontextualität" bezeichnet. Beide dieser Eigenschaften sind in der klassischen Physik vollkommen unbekannt und haben bei der Entwicklung der Quantenmechanik zu zahlreichen Diskussionen geführt. Unter anderem wies z.B. Einstein darauf hin, dass die Korrelationen zwischen den beiden räumlich getrennten Elektronen nur durch eine "spukhafte Fernwirkung" erklärt werden können. Die daraus gezogene Schlussfolgerung, dass die Quantentheorie keine vollständige Theorie sei, sondern noch zusätzliche "verborgene Parameter" beinhalte, ließ sich jedoch mittlerweile im Experiment widerlegen. Was Einstein jedoch beruhigt haben dürfte, ist der Umstand dass durch die instantane "Fernwirkung" zwischen den beiden Elektronen keine Information übertragen werden kann und somit das Kausalitätsgesetz der speziellen Relativitätstheorie nicht verletzt wird.

Anmerkung: In der Literatur wird bei der Kopplung zweier Spins \vec{S}_1, \vec{S}_2 zu einem Gesamtspin $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ die gekoppelte Basis häufig mit Großbuchstaben notiert, d.h. $|S, M_s\rangle \equiv |s_1, s_2, S, M_s\rangle$.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1a/1b/2/3