1. Tutorium VU Quantentheorie I, 9.10.2020

1. Gegeben sei die Matrix $H \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ in der kanonischen Basis $\{\vec{e}_1, \dots \vec{e}_4\}$

$$H^{\{e\}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Ist H hermitesch (=selbstadjungiert)? Ist H unitär? Welche Eigenschaften erfüllen Eigenwerte und Eigenvektoren einer hermiteschen bzw. einer unitären Matrix?

   b) Zeigen Sie explizit, warum die spezielle Struktur von H bedingt, dass das Matrixelement $h_{22} = -2$ ein Eigenwert ist. (*Hinweis*: Benützen Sie den Laplace'schen Entwicklungssatz). Verwenden Sie diese Eigenschaft, um die Eigenwerte und Eigenvektoren von H zu berechnen, ohne die Determinante einer 4×4-Matrix zu berechnen.

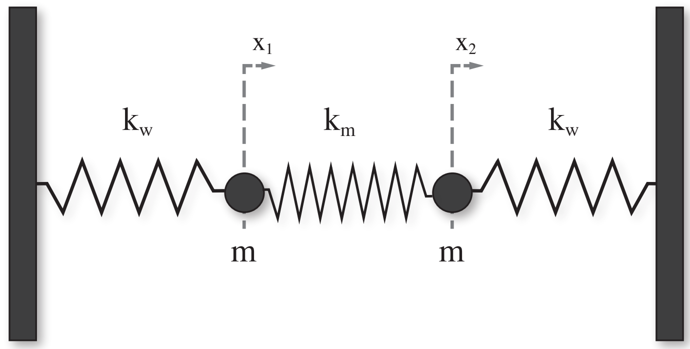
   c) Zeigen Sie explizit, dass die berechneten Eigenvektoren eine vollständige und orthogonale Basis bilden.

   d) Geben Sie die Diagonalzerlegung ($H = XDX^{-1}$) von H an, ohne dabei explizit die Inverse von H zu berechnen.
   Hinweis: Nützen Sie die Symmetrieeigenschaft von H. D ist hierbei eine Diagonalmatrix und X eine invertierbare Matrix.

   e) Geben Sie den Vektor $\vec{x} = (3, 5, i, 2)^T \in \mathbb{C}^4$ sowohl in der kanonischen Basis ($\vec{x}^{\{e\}}$) als auch in der Eigenbasis von H an ($\vec{x}^{\{\lambda\}}$). Überprüfen Sie das Ergebnis, indem Sie $X\vec{x}^{\{\lambda\}}$ berechnen.

2. Wir betrachten zwei Punktmassen der Masse m, die jeweils an einer fixen Wand mit einer linearen Feder mit Federkonstante k_w verbunden sind. Zusätzlich sind die beiden Massen untereinander mit einer linearen Feder mit Federkonstante k_m verbunden. Es wirken keine zusätzlichen äußeren Kräfte und die beiden Massen können sich ausschließlich horizontal bewegen. Gesucht ist die zeitliche Entwicklung der jeweiligen Auslenkungen aus der Gleichgewichtslage $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sowie die Normalschwingungen der beiden Massen.

   a) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen für dieses System in Matrixschreibweise auf. Erklären Sie um welche Art von Differentialgleichungen es sich handelt.



b) Lösen Sie die auftretenden Gleichungen mit Hilfe des folgenden Normalschwingungsansatzes:

$$\vec{X}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \vec{q}\,[Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}]\,. \tag{1}$$

Berechnen Sie die entsprechenden Eigenwerte und Eigenvektoren des auftretenden Eigenwertproblems.

c) Geben Sie die allgemeine Lösung der Auslenkungen $\vec{X}(t)$ als lineare Superposition der Normalschwingungen an.

d) Nehmen Sie an, die Massen sind elektrisch geladen und die Federn sind aus einem nicht-leitenden Material. Die Ladungen seien so klein, dass sie die oben berechnete Bewegung nicht beeinflussen. Sie messen in ausreichender Entfernung mit einer Antenne die ankommenden elektromagnetischen Wellen. Skizzieren Sie das gemessene Frequenzspektrum für die folgenden beiden Anfangsbedingungen:
(i) $x_1(0) = -x_2(0) \neq 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$,
(ii) $x_1(0) = 3x_2(0) \neq 0, \quad \dot{x}_1(0) = \dot{x}_2(0) = 0$.

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1abc/1de/2ab/2cd