2. Tutorium VU Quantentheorie I, 16.10.2020

1. Gegeben sei ein eindimensionaler Stab der Länge L, dessen Temperatur T als Funktion des Ortes $x \in [0, L]$ und der Zeit $t \in (0, \infty)$ untersucht werden soll. Lösen Sie dazu die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} ,$$

wobei κ der Temperatur-Leitwert ist (dieser bestimmt die Zeit, die zum Temperaturausgleich benötigt wird). Verwenden Sie zur Lösung obiger Differentialgleichung folgende Randbedingungen:

$$T(0, t) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0 ,$$

für alle Zeiten $t > 0$.

a) Vergleichen Sie obige Wärmeleitungsgleichung mit der Schrödinger-Gleichung bzw. der Wellengleichung und diskutieren Sie die Unterschiede bzw. Gemeinsamkeiten in der Struktur dieser Gleichungen.

b) Lösen Sie das Randwertproblem mittels Separation. Welche physikalische Bedeutung haben die Randbedingungen?

c) Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei der ganze Stab auf konstanter Temperatur $T = 1$. Passen Sie die aus Punkt (b) hervorgehende Lösung an diesen Anfangswert an.

d) Diskutieren Sie, wie das Verhalten von $T(x, t)$ vom Temperatur-Leitwert κ abhängt und stellen Sie den Verlauf von $T(x, t)$ mit Hilfe des Computers graphisch dar. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse physikalisch.

2. Ausgehend von den Maxwell-Gleichungen in Materie (lineares, homogenes, dielektrisches Medium ohne externe Quellen) soll die Änderung der Geschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen beim Durchgang durch ein Medium erklärt und mit dem Brechungsindex bzw. der optischen Dichte verknüpft werden. Die daraus resultierende Helmholtz-Gleichung soll dann mit der stationären Schrödinger-Gleichung verglichen werden, um die Analogie zwischen optischen Eigenschaften eines Mediums und den Quanteneigenschaften von Materie herzustellen. Schließlich soll das Transmissionsvermögen einer einfallenden monochromatischen, linear-polarisierten ebenen Welle beim Durchgang durch eine Scheibe aus Glas ermittelt werden.

Die Maxwell-Gleichungen in Materie ohne äußere Quellen ($\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$) lauten allgemein

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = +\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{4}$$

mit $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ und $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{M}$. Außerdem gilt $\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = c^{-1}$.

a) Leiten Sie aus (1) die folgende Gleichung her, indem Sie erneut die Rotation auf (1) anwenden:

$$\Delta \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{P}. \tag{5}$$

Im Vakuum gilt $\mathbf{P} = 0$. Wie heißt diese Gleichung in diesem Fall? Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich das $\mathbf{E}$-Feld im Vakuum aus?
Erklären Sie anhand der rechten Seite von (5) die reduzierte Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle im Medium.

b) In einem linearen, homogenen, dielektrischen Medium gilt $\mathbf{P} \propto \mathbf{E}$ und daher lässt sich das Verschiebungsfeld schreiben als $\mathbf{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \mathbf{E}$. Leiten Sie aus diesem Zusammenhang und Gleichung (5) die homogene Wellengleichung in einem linearen dielektrischen Medium her:

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t). \tag{6}$$

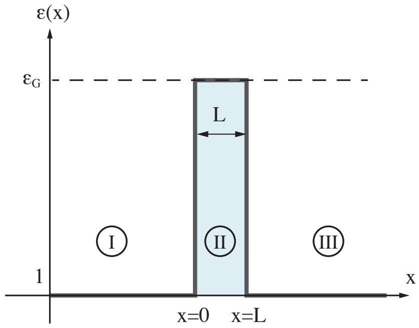
c) Separieren Sie den zeitabhängigen Anteil von (6) durch einen geeigneten Ansatz und leiten Sie daraus die Dispersionsrelation her. (*Hinweis:* Setzen Sie die Konstante als $-k^2$ an.)

d) Leiten Sie nun aus dem ortsabhängigen Anteil von (6) die Helmholtz-Gleichung her

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}) + n^2 k_0^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0, \tag{7}$$

wobei $k_0 = \omega / c$ und n ist der Brechungsindex des Mediums.

e) Vergleichen Sie die Struktur der Helmholtz-Gleichung in (7) mit der stationären Schrödinger-Gleichung in 3 Dimensionen. Worin besteht der Unterschied? Vergleichen Sie nun nur eine Komponente des $\mathbf{E}$-Feldes mit der stationären Schrödinger-Gleichung und diskutieren Sie inwiefern die auftretenden Ausdrücke für Brechungsindex n und Potential V ineinander übergeführt werden können. Gibt es in der Optik so etwas wie einen Tunneleffekt?



f) Man betrachte den Durchgang einer monochromatischen, linear-polarisierten (entlang der z-Achse) ebenen Welle, die entlang der x-Achse propagiert, einfallend von links ($x = -\infty$) durch eine Scheibe aus Glas ($n_G = \sqrt{\varepsilon_G} = 1.4$) der Dicke L. Vereinfachen Sie dazu zuerst (7) mit Hilfe von (3). Schreiben Sie die formale Lösung der skalaren Helmholtz-Gleichung in den drei Bereichen I,II,III durch ebene Wellen an und passen Sie dann die Übergangsbedingungen geeignet an.

g) Berechnen Sie das Tranmissionsvermögen $T_{I\to III}$ und skizzieren Sie es graphisch als Funktion der Wellenlänge des einfallenden **E**-Feldes.

3. Betrachten Sie ein System mit einem Freiheitsgrad, das Zustände mit Energien $E \in [0,\infty)$ annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System in einem Zustand mit Energie E befindet, hängt von der Temperatur T ab und ist gegeben durch die Boltzmann-Verteilung

$$P(E;\beta) = \frac{\exp(-\beta E)}{\int_0^\infty \exp(-\beta E')dE'}, \ \beta = \frac{1}{k_\mathrm{B}T}\,.$$

a) Berechnen Sie den Erwartungswert $\langle E\rangle$ der Energie des Systems bei der Temperatur T.

b) Modifizieren Sie obiges System so, dass nur mehr diskrete Energien $E_n = \hbar\omega n, n \in \mathbb{N}$ erlaubt sind. Wie ändert sich dann der Erwartungswert der Energie?

c) Erläutern Sie, wie die obigen Ergebnisse mit den Strahlungsgesetzen von Rayleigh-Jeans bzw. Planck zusammenhängen (keine Rechnung erforderlich).

Hinweis:
Der Erwartungswert $\langle X\rangle$ einer Zufallsvariablen (bzw. Messgröße) X ist jener Wert, der sich bei vielfachem Wiederholen des dazugehörigen „Experiments“ als Mittelwert der Ergebnisse (bzw. Messungen) ergibt, die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit $P(X)$ auftreten. Für den Erwartungswert einer kontinuierlichen Zufallsvariablen gilt:

$$\langle X\rangle = \int XP(X)dX$$

Zu kreuzen (online im *TUWEL*-Kurs zur LVA): 1/2abcd/2efg/3